TD n° 5

Premiers pas dans la NP-complétude

Rappel sur les graphes. Un graphe est ici donné par une matrice T de taille $n \times n$: $T[i, j]$ contient 1 s'il y a une arête de i à j, et contient 0 sinon. On suppose qu'on a toujours $T[i,i] = 0$ (*i.e.* on n'a pas d'arête d'un sommet vers lui même). Un graphe G de n sommets est donc de taille n^2. Un sommet dans ce modèle est un entier compris entre 1 et n. Il est donc de taille $\log n$.

	a	b	c	d	e	g	h
a	0	1	1	1	1	1	0
b	1	0	1	1	0	0	1
c	1	1	0	1	0	0	0
d	1	1	1	0	0	0	0
e	1	0	0	0	0	0	0
g	1	0	0	0	0	0	0
h	0	1	0	0	0	0	0

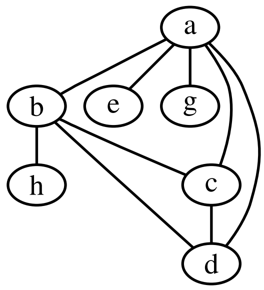

FIGURE 2 – Exemple de graphe

Dans un graphe, une *clique* de taille k est la donnée de k sommets du graphe tel tous les points de cet ensemble soient reliés deux à deux. Dans l'exemple, on voit que $\{a,b,c,d\}$ forment une clique de taille 4. On dit qu'un ensemble de sommets est *indépendant* si entre chaque couple de point de cet ensemble, il n'existe pas d'arête. Dans notre exemple $\{c,e,g,h\}$ sont indépendants. Une *couverture* est un ensemble de sommet tel que toute arrête du graphe possède au moins une de ces extrémité dans cet ensemble. Ici une couverture possible est $\{a,b,d\}$.

Exercice 1. CLIQUE $\leq_{pol}$ SOUS-GRAPHE-ISOM

On considère le problème suivant :

SOUS-GRAPHE-ISOM
Entrée : Un couple (G,H) de graphes ;
Question : G contient-il un sous-graphe isomorphe à H ?

1. Montrer que SOUS-GRAPHE-ISOM $\in$ NP.
☞ On doit vérifier deux choses pour prouver que SOUS-GRAPHE-ISOM $\in$ NP :
1. Qu'il existe un certificat de taille polynômiale (en général une solution)
2. Qu'il existe un algorithme A qui prenant en entrée ce certificat et l'entrée du problème vérifie en temps polynômial si la réponse à la question est oui.

Dans notre cas, le certificat ce sera, si il y a une solution, la correspondance entre les sommets qui forment le sous isomorphisme, et l'algorithme se contentera de vérifier que cette correspondance définit bien un sous-isomorphisme.

2. On note C_k le graphe complet à k sommets. Montrer que l'application

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathscr{I}(\text{CLIQUE}) & \to & \mathscr{I}(\text{SOUS-GRAPHE-ISOM}) \\ (G,k) & \mapsto & (G,C_k) \end{array} \right.$$

est une réduction polynômiale de CLIQUE à SOUS-GRAPHE-ISOM.

☞ Il est évident que cette application est une réduction. Il faut maintenant vérifier qu'elle est bien en temps polynômial. Il y a deux cas de figure à envisager, notons n le nombre de sommets de G :

- Si $n >= k$, on construit le graphe C_k, la construction prend $k^2 < n^2$ étapes, la réduction est polynômiale.
- Si $n < k$, on sait déjà la réponse au problème, il suffit donc de donner une instance qui ne fonctionne pas, par exemple $((1), C_2)$ (graphe à un sommet, clique à 2 sommets). Il faut faire attention, car si l'on construit bêtement C_k, cela prend k^2 étapes de calcul, or la taille de l'entrée peut très bien être en $\mathcal{O}(\log k)$ et donc la réduction prendrait un temps exponentiel.

3. Conclusion ?

☞ Comme on a $\leq_{\text{pol}}$ -CLIQUESOUS-GRAPHE-ISOM et que -CLIQUE est NP-complet, SOUS-GRAPHE-ISOM est NP-complet. En effet, si l'on arrive à résoudre SOUS-GRAPHE-ISOM, on arrive à résoudre -CLIQUE avec au plus une "polynômiation" du temps de résolution de SOUS-GRAPHE-ISOM.

Exercice 2. *Réductions sur les graphes*

1. Établir la suite de réductions : COUVERTURE $\leq_{\text{pol}}$ CLIQUE $\leq_{\text{pol}}$ INDÉPENDANT.

☞

COUVERTURE $\leq_{\text{pol}}$ CLIQUE : $G = (V,E)$ a une couverture de taille k ssi son complément $(V, V^2 \setminus E)$ (si on avait une arête, on n'en a plus et si on en avait pas, on en a une) a une clique de taille $n-k$:

- $\Rightarrow$ Supposons que G ait une couverture C de taille k. Prenons deux sommets $x, y \in V \setminus C$, il ne peut pas y avoir d'arête entre x et y (sinon, elle ne serait pas couverte). Donc les sommets de $V - C$ forment un ensemble de sommets indépendants. Il y en a exactement $n-k$. En inversant les arêtes, cela forme une clique.
- $\Leftarrow$ Supposons que le complémentaire de G ait une clique de taille $n-k$, alors G a un ensemble de sommets indépendants de taille $n-k$. Donc si l'on prend les autres sommets de G, ils couvrent toutes les arêtes, il y en a k.

CLIQUE $\leq_{\text{pol}}$ INDÉPENDANT : $G = (V,E)$ a une clique de taille k ssi inverse $(V, V^2 \setminus E)$ a un indépendant de taille k.

2. Montrer de plus : INDÉPENDANT $\leq_{\text{pol}}$ COUVERTURE.

☞ A partir de la réduction de -CLIQUE à -COUVERTURE , vous devriez arriver à déduire celle-ci (un indice : elle est plus simple). Notez également que ces deux réductions marchent dans les deux sens.

3. Que peut-on dire si INDÉPENDANT est NP-complet ? Et si COUVERTURE $\in$ P ?

☞ Cette réponse prend en compte la question précédente (sinon la réponse serait fausse). Si INDÉPENDANT est NP-complet, alors CLIQUE et COUVERTURE sont NP-complets. Si COUVERTURE $\in$ P alors les autres problèmes aussi sont dans P. En supposant que l'on aie comme seule information que la question 2, on peut juste dire que si INDÉPENDANT est NP-complet, alors COUVERTURE est NP-dur (il faut encore prouver qu'il est dans NP pour avoir la complétude). Et que si COUVERTURE $\in$ P alors INDÉPENDANT $\in$ P

4. Montrer que COUVERTURE $\in$ NP.

5. Montrer que CLAUSE-SAT $\leq_{\text{pol}}$ 3-SAT $\leq_{\text{pol}}$ COUVERTURE.

6. Conclusion ?