TD n° 3

Machines de Turing

Exercice 1.
Construire un codage du problème SAT (satisfaisabilité d'une formule propositionnelle) sur l'alphabet $\{0,1\}$.

Exercice 2.
On considère la machine de Turing $\mathscr{M} = (\Sigma, \Gamma, Q, q_0, q_a, q_r, \delta)$ définie par : $\Sigma = \{0,1\}$; $\Gamma = \{0,1,\mathrm{B}\}$; $Q = \{q_0, q_1 q_a, q_r\}$ et :

$$\begin{array}{l|l} \delta(q_0,B) = (q_0,B,\rightarrow) & \delta(q_1,B) = (q_a,B,\downarrow) \\ \delta(q_0,0) = (q_0,0,\downarrow) & \delta(q_1,0) = (q_0,0,\downarrow) \\ \delta(q_0,1) = (q_1,1,\rightarrow) & \delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow) \end{array}$$

1. La suite de configurations $(q_0, \underline{\mathrm{B}}110)$; $(q_0, \mathrm{B}\underline{1}10)$; $(q_1, \mathrm{B}1\underline{1}0)$; $(q_1, \mathrm{B}11\underline{0})$; $(q_0, \mathrm{B}11\underline{0})$ est-elle une dérivation de $\mathscr{M}$?
2. Quel est le langage reconnu par $\mathscr{M}$?
3. Ce langage est-il décidable ?

Exercice 3.
Construire des machines de Turing qui calculent :

1. L'ensemble des mots sur $\{0,1\}$ comportant un nombre pair de 1 ;
2. la fonction successeur qui envoie la représentation binaire d'un entier n sur la représentation binaire de $n+1$;
3. le langage $\{a^n b^n c^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4.
Soient $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$ deux machines de Turing de même alphabet d'entrée Σ et $f_1, f_2 : \Sigma^* \to \Sigma^*$ les fonctions partielles calculées par ces machines. Construire une MT qui calcule $f_2 \circ f_1$.

Exercice 5. *Ensembles dénombrables*
On note $\sim$ la relation d'équipotence entre ensembles.

1. Soient A et B deux ensembles infinis et $f : A \to B$. Démontrer les implications suivantes :
   (a) $(A \sim \mathbb{N}$ et f surjective$) \Rightarrow (B \sim \mathbb{N})$;
   (b) $(B \sim \mathbb{N}$ et f injective$) \Rightarrow (A \sim \mathbb{N})$;
   (c) $(B \sim \mathbb{N}$ et $A \subseteq B) \Rightarrow (A \sim \mathbb{N})$.
2. Montrer que $\{0,1\}^*$ est dénombrable.

3. Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice 6. *Codage*

Écrire 12 et 281 en binaire. Quelle est la taille de ces entrées ?

Exercice 7. *Calculabilité de $n \mapsto n^2$*

Le but de cet exercice est de construire une machine de Turing qui sur l'entrée $n \in \mathbb{N}$ renvoie n^2. Dans toute la suite, les entrées de la machine seront écrites en binaire (les bits de poids faibles à droite). On appelle *taille* de l'entrée le nombre de caractères non blancs. On note $|n|$ la taille de l'entrée n (codée en binaire). On considère la machine de Turing suivante :

	0	1	B
q_0			$(q_1, B, \to)$
q_1	$(q_1, 0, \to)$	$(q_1, 1, \to)$	$(q_2, B, \leftarrow)$
q_2	$(q_f, 1, \leftarrow)$	$(q_2, 0, \leftarrow)$	$(q_f, 1, \leftarrow)$

1. Exécuter la machine précédente sur les configurations $(q_0, B\underline{B}1001111B)$ et $(q_0, \underline{B}100B)$.
2. Que fait cette machine sur l'entrée n ? Combien d'étapes de calcul (en fonction de la taille de l'entrée) utilise-t-elle au plus ?
3. Modifier cette machine pour qu'à la fin de l'exécution la tête soit située à gauche du bit de poids fort.
4. Écrire une machine de Turing qui décrémente son entrée (on supposera que l'entrée est strictement positive). On s'arrangera pour qu'à la fin de l'exécution, la tête soit à gauche du bit de poids fort. L'exécuter sur l'entrée $(q_0, B\underline{B}1001111B)$ puis sur l'entrée $(q_0, B\underline{B}100B)$.
5. Donner une borne du nombre d'étapes de calcul en fonction de la taille de l'entrée.
6. Écrire une machine qui ayant en entrée n sur un ruban A et m sur un ruban B écrit $m+n$ sur le ruban B (et laisse A inchangé). Donner une borne sur le nombre d'étapes de calcul en fonction de $|m|$ et $|n|$.
7. Écrire une machine qui sur l'entrée $n+1$ sur un ruban A et m sur un ruban B écrit $m+2n+1$ sur le ruban B et n sur le ruban A. Donner une borne sur le nombre d'étapes de calcul en fonction de $|m|$ et $|n|$.
8. En remarquant que $(n+1)^2 = 2n+1+n^2$, construire une machine de Turing qui ayant en entrée n sur la ruban A et m sur le ruban B écrit $m+n^2$ sur le ruban B et 0 sur le ruban A (on pourra utiliser la machine construite dans la question précédente).
9. En déduire une machine de Turing qui ayant en entrée n sur le ruban A et un ruban B vide écrit n^2 sur le ruban B. Donner un ordre de grandeur du nombre d'étapes de calcul.

A partir de maintenant, on n'est plus obligés de toujours donner la table de transition : une explication rigoureuse suffit.

Exercice 8. *Après l'échauffement*

Trouver la manière et estimer le temps nécessaire pour simuler une machine de Turing :

1. à k rubans par une machine à un ruban (bonus : peut-on faire mieux avec 2 rubans ?) ;

2. travaillant sur un alphabet Γ par une machine travaillant sur l'alphabet $\{0, 1, \square\}$;
3. à ruban bi-infini par une machine à ruban mono-infini.

Définition 1 *Une machine de Turing est dite* oublieuse [1] *si sur une entrée x, la position de la tête de lecture à l'instant i ne dépend que de i et de* $|x|$.

4. Expliquer comment simuler une machine de Turing par une machine oublieuse, et estimer le temps de la simulation. (constructible) T par une machine oublieuse fonctionnant en temps $O(T^2)$? Et en $O(T \log T)$?

1. *Oblivious*, en anglais.