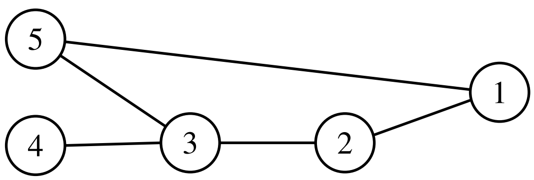
# TD n° 1

## Graphes et colorations

Un graphe est ici donné par une matrice T de taille $n$ par $n$ : $T[i, j]$ contient 1 s'il y a une arête du sommet $i$ au sommet $j$, et contient 0 sinon. Un graphe $G$ de $n$ sommets est donc de taille $n^2$. Un sommet dans ce modèle est un entier compris entre 1 et $n$ : il est donc de taille $\log n$. On voit sur la figure ci-dessous un exemple de graphe à 5 sommets, et la matrice qui lui correspond.



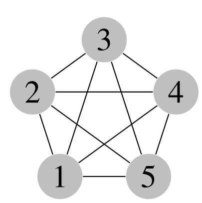

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 1 – Un graphe et sa représentation comme un tableau

---

**Exercice 2.1** *(Graphes de Mycielski).* Une coloration d'un graphe par $k$ couleurs est la donnée, pour chaque sommet du graphe, d'une des $k$ couleurs. On dit qu'un graphe est $k$-coloriable si on peut le colorer avec $k$ couleurs de sorte que deux sommets adjacents (reliés par une arête) soient de couleurs différentes. Il est $k$-chromatique s'il est $k$-coloriable mais pas $(k-1)$-coloriable.

(**a**) Montrer qu'un graphe à $n$ sommets est $n$-coloriable. Donner un graphe à 5 sommets qui n'est pas 4-coloriable. *Corrigé.* Si on colore chaque sommet d'un graphe avec une couleur différente, on obtient un coloriage valide avec $n$ couleurs. Exemple de graphe à 5 sommets qui n'est pas 4-coloriable : une clique à 5 sommets.




On dit qu'un graphe est biparti si on peut partitionner ses sommets en deux ensembles $V_1$ et $V_2$ de sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets de $V_1$ (resp. de $V_2$). Les seules arêtes joignent donc un sommet de $V_1$ à un sommet de $V_2$.

(**b**) Montrer qu'un graphe est 2-coloriable si et seulement si il est biparti. *Corrigé.* $\Rightarrow$ Si un graphe $G$ est 2-coloriable, prenons un 2 coloriage de celui-ci. Soit $V_1$ l'ensemble des sommets d'une couleur et $V_2$ ceux de l'autre. $V_1, V_2$ forment une bipartition valide de $G$

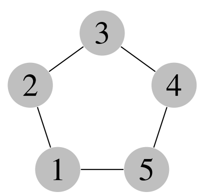
$\Leftarrow$ Soit $G$ un graphe biparti. Par définition, on peut colorier $V_1$ d'une couleur et $V_2$ d'une autre.

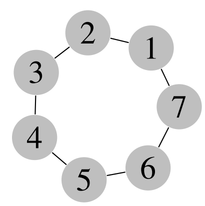
(**c**) Donner un algorithme pour décider si un graphe est biparti. *Corrigé.* Une simple variation sur le parcours en profondeur fonctionne : on explore le graphe, et on colorie les sommets au fur et à mesure. Si on trouve une contradiction, le graphe n'est pas 2-coloriable et donc pas biparti.

On dit qu'un graphe contient une clique de taille $k$ s'il contient $k$ sommets tous reliés les uns aux autres.

(**d**) Montrer que si un graphe est $k$-coloriable, il n'a pas de clique de taille $k+1$. *Corrigé.* Une clique de taille $k+1$ est au mieux $k+1$ coloriable, donc un graphe contenant une telle clique ne peut pas être $k$-coloriable.

(**e**) Donner deux exemples d'un graphe sans clique de taille 3 (sans triangle) mais qui ne sont pas 2-coloriable. *Corrigé.*

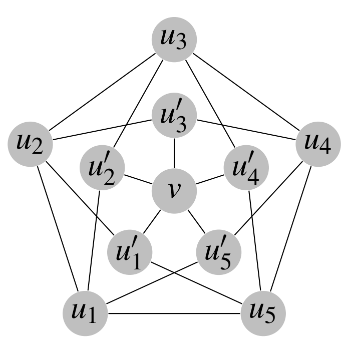



Soit $G$ est un graphe. On note les sommets $u_1 \dots u_n$. On construit un graphe $\theta(G)$ de la façon suivante

- $\theta(G)$ a $2n+1$ sommets : les $n$ sommets du graphe original, des sommets $u'_1 \dots u'_n$ en plus, et un sommet $v$ ;
- Le graphe contient les arêtes suivantes :
  - Les arêtes originales entre les sommets $u_i$ ;
  - S'il y a une arête de $u_i$ à $u_j$, on ajoute une arête de $u'_i$ à $u_j$ ;
  - Il y a une arête de $u'_i$ à $v$ pour tout $i$.

(**f**) Construire le graphe $\theta(G)$ lorsque $G$ est un cycle à 5 sommets. Donner sa matrice. *Corrigé.*




$$T = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

(**g**) Montrer, dans le cas général, que si $G$ n'a pas de triangle, $\theta(G)$ non plus. *Corrigé.* Supposons que $G$ n'aie pas de triangle, alors comme il n'y a pas d'arêtes entre les $u_i'$ dans $\theta(G)$, la seule manière de former un triangle serait par une des arêtes entre les $u_i$ et $u_i'$ : Supposons que cela crée un triangle, les sommets de ce triangle seraient alors de la forme $u_i, u_j, u_l'$, ceci est impossible, car cela impliquerait qu'il existait déjà un triangle $u_i, u_j, u_l$.

(**h**) Montrer, dans le cas général, que si $G$ est $k$-chromatique, $\theta(G)$ est $(k+1)-$chromatique *Corrigé.* Il y a deux choses à prouver : que $\theta(G)$ est $k+1$-coloriable (a) et que $\theta(G)$ n'est pas $k$-coloriable (b).

(a) Prenons un coloriage de $G$ avec $k$ couleurs, nous allons colorier $\theta(G)$ avec $k+1$ couleurs : Colorions les $u_i$ de la même couleur que dans $G$ et pour chaque $i$, $u_i'$ de la même couleur que $u_i$. On colorie alors $v$ avec une nouvelle couleur. Il est clair que ce coloriage avec $k+1$ couleurs est valide.

(b) Supposons que $\theta(G)$ soit $k$-coloriable, alors nécessairement, $v$ est de la même couleur que certains $u_i$, disons vert. On applique le recoloriage suivant :
– Si $u_i$ est vert, on le recolorie de la même couleur que $u_i'$
– Si $u_i$ n'est pas vert, il garde sa couleur.
Vérifions que le $k-1$-coloriage de $G$ ainsi obtenu est valide. Soit $(u_i, u_j)$ une arête, si $u_i$ était vert, alors il est de la même couleur que l'était $u_i'$ qui est d'une couleur différente que $u_j$ (qui ne pouvait être vert, car relié à $u_i$). Si $u_i$ n'était pas vert, le raisonnement est similaire.
Comme $G$ est $k$-chromatique, ceci est impossible, et donc $\theta(G)$ est $k+1$-chromatique.

---

**Exercice 2.2** *(Ramsey).* Dans cette partie, on colorie les *arêtes* et non pas les sommets. On s'intéresse uniquement à une coloration avec deux couleurs de graphe complet (tous les sommets sont reliés les uns aux autres).

(**a**) Montrer qu'un graphe complet (clique) à au moins 6 sommets colorié avec deux couleurs contient soit un triangle rouge soit un triangle bleu. On pourra commencer par montrer qu'il existe un sommet qui, à renommage des couleurs près, a trois arêtes bleues. *Corrigé.* Prenons un sommet $v$, il a 5 arêtes, il y a alors deux possibilités soit il a une majorité d'arêtes bleues, soit un majorité d'arêtes rouges. On peut alors supposer sans perte de généralité qu'elles sont bleues. On a donc un sommet $v$ avec au moins trois arêtes bleues vers des sommets $v_1, v_2, v_3$. Il y a alors deux cas, soit une des arêtes $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)$ est bleue, et on a alors un triangle bleu, soit elles sont toutes rouges et on a un triangle rouge formé par $v_1, v_2, v_3$.

(**b**) En déduire que dans tout groupe de six personnes, il y en a soit trois qui se connaissent mutuellement, soit trois qui ne se connaissent pas entre elles. *Corrigé.* Prenons une représentation avec un graphe des relations entre ces six personnes : chaque personne est représentée par un sommet, et il y a une arête rouge entre deux sommets si les deux personnes se connaissent et bleue sinon. Le résultat est alors une conséquence directe de la question précédente.

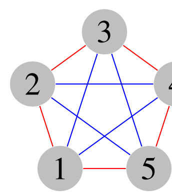
On note $R(p,q)$ le plus petit nombre $n$ tel que tout graphe à au moins $n$ sommets contient soit une clique bleue de taille $p$ soit une clique rouge de taille $q$. Si jamais un tel nombre n'existe pas, on pose $R(p,q) = +\infty$. Evidemment, $R(p,q) = R(q,p)$.

*Attention :* une clique bleue de taille $p$ est une clique de taille $p$ où toutes les *arêtes* sont bleues (puisqu'on colorie les arêtes et pas les sommets)

(**c**) Calculer la valeur de $R(1,q)$ et $R(p,1)$. *Corrigé.* $R(1,q)=1$ et $R(p,1)=1$.

(**d**) Calculer la valeur de $R(2,q)$ et $R(p,2)$. *Corrigé.* $R(1,q)=q$ et $R(p,1)=p$.

(**e**) Calculer la valeur de $R(3,3)$. *Corrigé.* On a vu à la première question, que $R(3,3)\leq 6$, il nous suffit donc de trouver un coloriage du graphe complet à 5 sommets n'aillant ni un triangle rouge, ni un triangle bleu :




(**f**) Montrer que $R(p,q)\leq R(p-1,q)+R(p,q-1)$. (Prendre un sommet $v$ au hasard, et séparer les autres en deux parties : ceux pour lesquels l'arête qui les relie à $v$ est bleue, et ceux pour lesquels elle est rouge) *Corrigé.* Prenons un graphe avec $R(p-1,q)+R(p,q-1)$ sommets. On en prend un sommet $v$ au hasard, et on partitionne les sommets restants en deux ensembles, ceux reliés à $v$ par une arête bleue $B$ et par une arête rouge $R$. On a alors

- soit $|B|\geq R(p-1,q)$, et alors deux cas sont possibles. Soit $B$ a une $p-1$-clique bleue, et donc en ajoutant $v$, une $p$-clique bleue (donc le graphe d'origine aussi). Soit $B$ a une $q$-clique rouge.
- soit $|R|\geq R(p,q-1)$, auquel cas l'analyse est identique.

(**g**) En déduire que $R(p,q)$ est toujours bien défini. Donner une borne pour $R(4,4)$. *Corrigé.* Par induction, $R(p,q)$ est toujours bien défini. On peut facilement borner $R(4,4)$ grâce à l'inégalité obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} R(4,4) &\leq R(3,4)+R(4,3) \\ &\leq 2(R(2,4)+R(3,3)) \\ &\leq 20 \end{aligned}$$