,,

Culture Scientifique S3

Laura Fontanella
laura.fontanella@gmail.com
https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/laura.fontanella/

July 26, 2022

Matrices

Une **matrice** est un tableau de données comportant un certain nombre de lignes et de colonnes.
Une matrice avec m lignes et n colonnes, est dite “ *de taille (m, n)* ”

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 1 & \pi & 3/2 & 82 \\ cos(\theta) & 27 & i & \sqrt{2} \\ i\sqrt{3} & 50 & 2.\bar{3} & 36 \end{bmatrix}$$

Matrices

Lorsqu'on ne connait pas les éléments d'une matrice à n lignes et p colonnes on la note

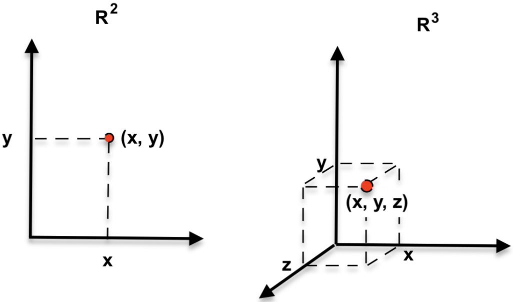
$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

ou plus simplement (a_{ij})

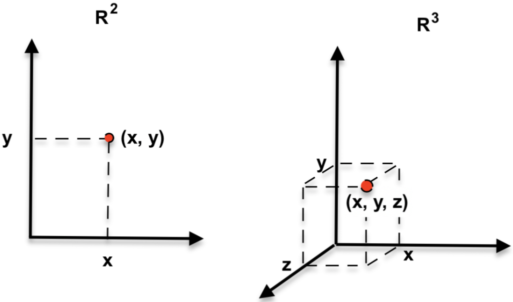
Une matrice à une ligne s'appelle *matrice-ligne*, une matrice à une colonne s'appelle *matrice colonne*

Matrices-colonnes

Les points du plan, resp. de l'espace, sont représentés par des couples de réels (x,y), resp. des triplets de réels (x, y, z).
On peut représenter les points du plan, resp. de l'espace, par des matrices-colonnes



Les points du plan, resp. de l'espace, sont représentés par des couples de réels (x,y), resp. des triplets de réels (x, y, z).
On peut représenter les points du plan, resp. de l'espace, par des matrices-colonnes

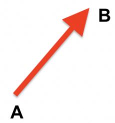


Exemples/Exercices: reperage dans le plan et dans l'espace (voir le tableau)

Matrices colonnes

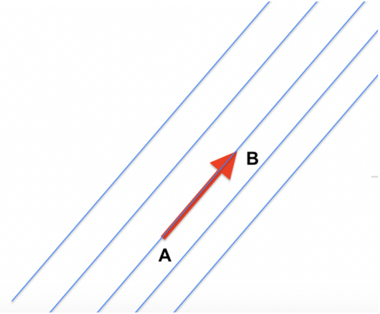
Un **vecteur** est la donnée de

- une *direction* (définie par la droite (AB))
- un *sens* (de A vers B ou de B vers A)
- une *norme* (la longueur du segment AB)



Un **vecteur** est la donnée de

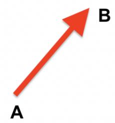
- une *direction* (définie par la droite (AB))
- un *sens* (de A vers B ou de B vers A)
- une *norme* (la longueur du segment AB)



Matrices colonnes

Un **vecteur** est la donnée de

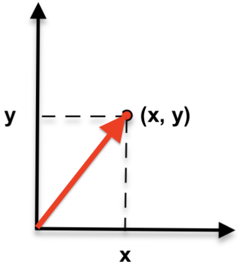
- une *direction* (définie par la droite (AB))
- un *sens* (de A vers B ou de B vers A)
- une *norme* (la longueur du segment AB)



Matrices colonnes

Un **vecteur** est la donnée de

- une *direction* (définie par la droite (AB))
- un *sens* (de A vers B ou de B vers A)
- une *norme* (la longueur du segment AB)



On peut donc représenter un vecteur du plan ou de l'espace par une matrice-colonne.

Somme et différence de matrices

$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices *de même taille* $n \times p$, la matrice somme $A + B$, resp. différence $A - B$, est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$, resp. $(a_{ij} - b_{ij})$.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Somme et différence de matrices

$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices *de même taille* $n \times p$, la matrice somme $A + B$, resp. différence $A - B$, est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$, resp. $(a_{ij} - b_{ij})$.

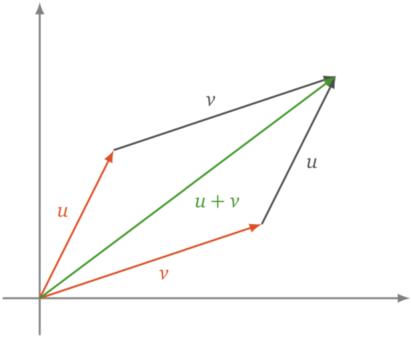
Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Somme de vecteurs

Vous pouvez vérifier que la somme de deux matrices-colonne de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ corresponds bien à la somme de vecteurs du plan (règle du parallélogramme).



Matrices de pixels

Imaginons que $A = (a_{ij})$ soit une matrice de pixels d'une image en noir et blanc dont la définition est $n \times p$ pixels, on veut obtenir son négatif. On considère la matrice M de taille $n \times p$ dont tous les coéfficients valent 1. Quelle operation de matrice doit-t-on faire pour obtenir le négatif de l'image?

Matrices de pixels

Imaginons que $A = (a_{ij})$ soit une matrice de pixels d'une image en noir et blanc dont la définition est $n \times p$ pixels, on veut obtenir son négatif. On considère la matrice M de taille $n \times p$ dont tous les coéfficients valent 1. Quelle operation de matrice doit-t-on faire pour obtenir le négatif de l'image?

$$M - A = (1 - a_{ij})$$

est la matrice de pixels de l'image en négatif.

Multiplication par un scalaire

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice à coéfficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, no note λA la matrice (λa_{ij})

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = 2$$

Multiplication par un scalaire

Si $A = (a_{ij})$ est une matrice à coéfficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, no note λA la matrice (λa_{ij})

Exemple

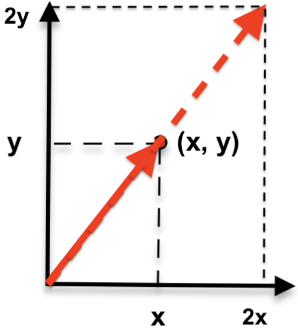
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda = 2$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

On appelle *scalaires* les éléments de $\mathbb{K}$

Multiplication par un scalaire

$$2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$



Espace $\mathbb{R}^n$

On peut généraliser l'espace $\mathbb{R}^3$ à l'espace $\mathbb{R}^n$ à n-dimensions ($n \in \mathbb{N}$). Un point ou *vecteur* de l'espace $\mathbb{R}^n$ est donc un n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels qu'on peut représenter par des matrices-colonne.

Produit matrice-vecteur

Soient $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$ une matrice $n \times p$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$, le produit AB est la matrice-colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} b_1 + \dots + a_{1p} b_p \\ \vdots \\ a_{n1} b_1 + \dots + a_{np} b_p \end{bmatrix}$$

Attention! Il faut que B ait le même nombre de lignes que le nombre de colonnes de A

Produit matrice-vecteur

Exemple

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Produit matrice-vecteur

Exemple

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ il vient: $AB = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$

Applications linéaires

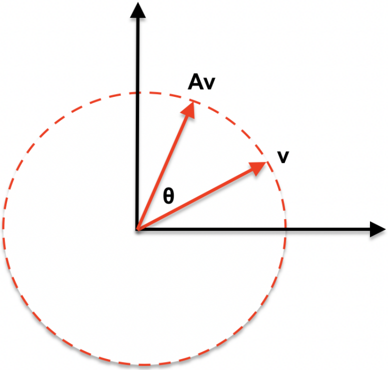
On remarque que, en multipliant une matrice par un vecteur, on obtient un autre vecteur . À toute matrice $n \times p$ on peut donc associer une application de R^p dans R^n

Une **application linéaire** de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est une application de la forme $V \mapsto AV$ où A est une matrice $n \times p$

Applications linéaires - matrices de rotations

Exemple -matrice de rotation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ corresponds à la rotation de centre O et d'angle θ (sur $\mathbb{R}^2$)



Multiplication de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B, noté AB est la matrice $n \times p$ dont la j-ème colonne est le produit de A par la j-ème colonne de B

Si $B = \left[\begin{array}{c|c|c} c_1 & \dots & c_n \end{array} \right]$,

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c} Ac_1 & \dots & Ac_n \end{array} \right]$$

Multiplication de matrices

Exemple

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplication de matrices

Exemple

Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \\ 5 & 6 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$$

Attention! La multiplication matricielle n'est pas commutative.

Multiplication de matrices

Exemple

Si M_α et M_β sont les matrices de centre O et de rotation α et β resp. , alors à quoi corresponds la matrice $M_\alpha M_\beta$?

Multiplication de matrices

Exemple

Si M_α et M_β sont les matrices de centre O et de rotation α et β resp. , alors à quoi corresponds la matrice $M_\alpha M_\beta$?
C'est la matrice de centre O et de rotation $\alpha + \beta$

Si f est une application linéaire de matrice A et g est une application linéaire de matrice B, alors AB est la matrice de l'application (linéaire) $f \circ g$

Transformations géométriques du plan et de l'espace

Transformations gémométriques du plan

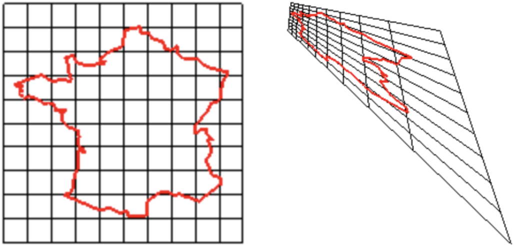
Une **transformation du plan** est une application qui associe à tout point du plan un unique point du plan (c.à.d. une application bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)

Exemples

- l'**identité** ($f(P) = P$)
- les *rotations*

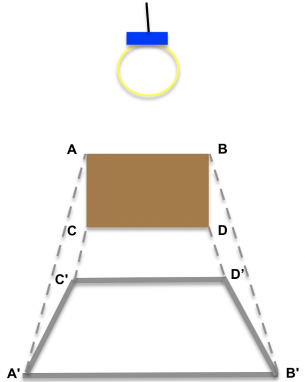
Classification des transformations

- **transformations homographiques:** préservent les droites et les segments



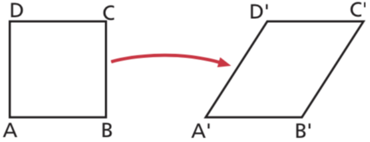
Classification des transformations

- **transformations homographiques:** préservent les droites et les segments



Classification des transformations

- **transformations homographiques:** préservent les droites et les segments
- **transformations affines:** préservent les droites, les segments et le parallelisme



Transformations gémométriques du plan

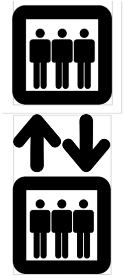
Classification des transformations

- **transformations homographiques:** préservent les droites et les segments
- **transformations affines:** préservent les droites, les segments et le parallelisme
- les **similitudes:** préservent les rapports entre les distances

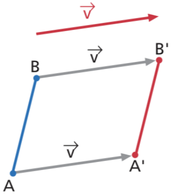
Transformations gémométriques du plan

Classification des transformations

- **transformations homographiques:** préservent les droites et les segments
- **transformations affines:** préservent les droites, les segments et le parallelisme
- les **similitudes:** préservent les rapports entre les distances
- les **isométries:** préservent les distances



Étant donné un vecteur v du plan, la **translation de vecteur** v est la fonction qui à tout point P associe un point P' tel que le vecteur $\vec{PP'}$ est égal à v

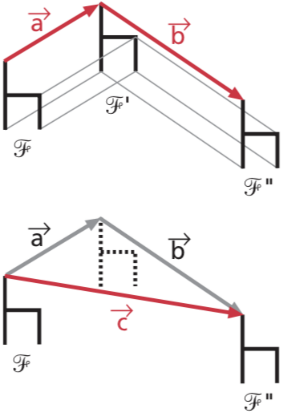


La traslation de vecteur $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ c'est la fonction $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{bmatrix}$

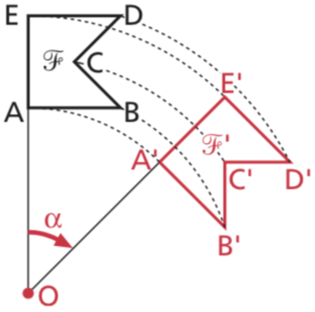
Exercice: verifier qu'une translation est une isométrie

Isométries - composition de traslations

La composition de deux translations est une translation. Si t_v et t_w sont les translations de vecteurs v resp. w, la composition $t_v \circ t_w$ est t_{v+w} la translation de vecteur $v + w$.



Étant donné un point O du plan et un angle α, la **rotation de centre O et d'angle α** est l'application qui à tout point P du plan associe un point P' tel que le segments OP et OP' sont de même longueure et l'angle $P\hat{O}P'$ est égale à α et de même orientation que α.
Une rotation est une isométrie.

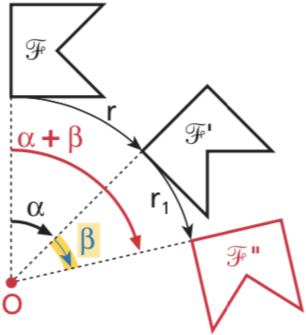


Isométries - composition de rotations

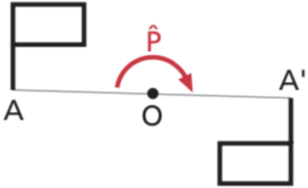
Rappel

La matrice de la rotation de centre O (le centre du plan cartesian) et d'angle α est $\begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix}$

La composition de deux rotations *de même centre* est une rotation.



Étant donné un point O du plan, la **symétrie centrale de centre** O est la transformation géométrique qui à tout point P du plan associe un point P' tel que O est le milieu du segment PP'.

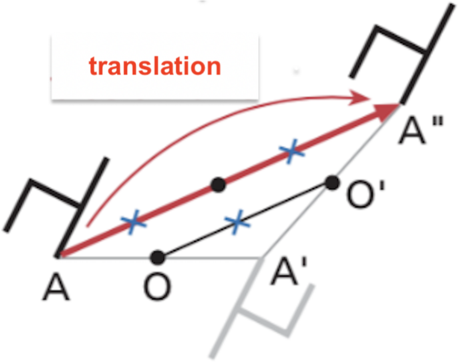


On peut voir la symétrie centrale aussi comme une rotation d'angle π autour du centre de symétrie.

Exercice: Écrire la matrice de la symétrie centrale autour du centre du plan cartesian

Composition de symétries centrales

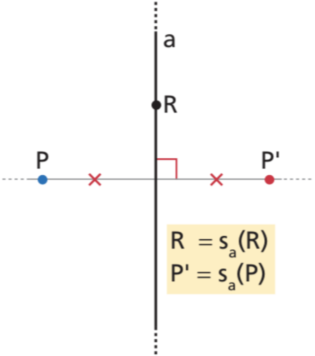
La composition de symétries centrales donne lieu à une translation.



Isométries - la symétrie axiale ou réflexion

Étant donné une droite D du plan, la **symétrie axiale** ou **réflexion** d'axe D est la transformation géométrique qui

- à tout point P de la droite associe le point P
- à tout point P qui n'appartient pas à la droite, associe un point P' sur la perpendiculaire à D tel que P et P' ont la même distance à D.



Composition de symétries

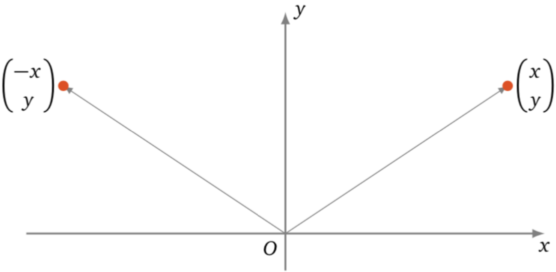
La composition d'une symétrie (axiale ou centrale) avec elle même c'est l'identité.

[source Bessi de Pixabay]

Réflexion par rapport à l'axe Oy

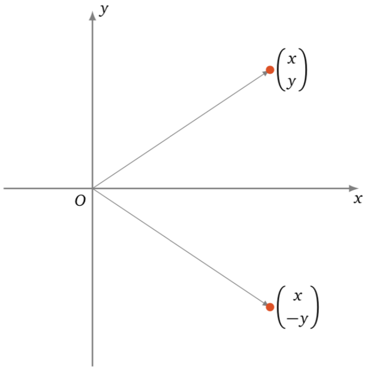
Réflexion par rapport à l'axe Oy

c'est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ et sa matrice est $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



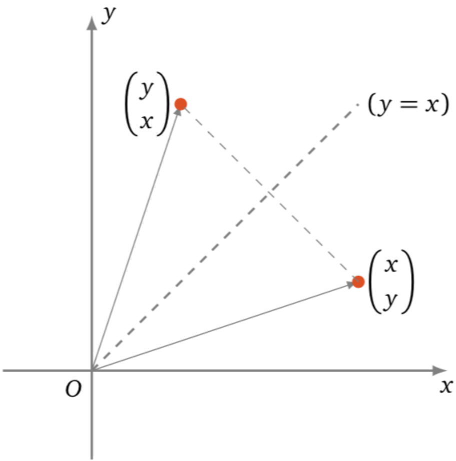
Réflexion par rapport à l'axe Ox

c'est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ et sa matrice est $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



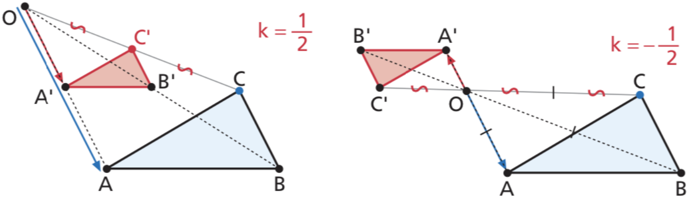
Réflection par rapport à la droite $(y = x)$

c'est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ et sa matrice est $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



Les homothéties

Étant donné un point O du plan et un réel $k \neq 0$, l'**homothetie de rapport** k est la transformation géométrique qui à tout point P associe un point P' dans la droite (OP) tel que $\frac{OP'}{OP} = k$

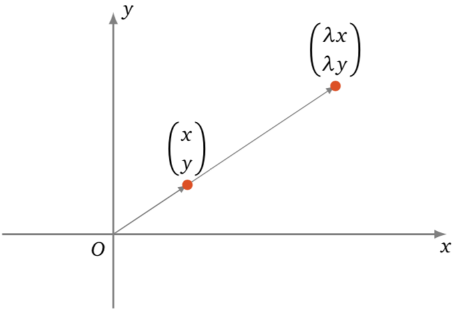


Attention!

L'homothetie n'est pas une isométrie

L'homothetie de rapport k

c'est la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ et sa matrice est $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k\ I_2$



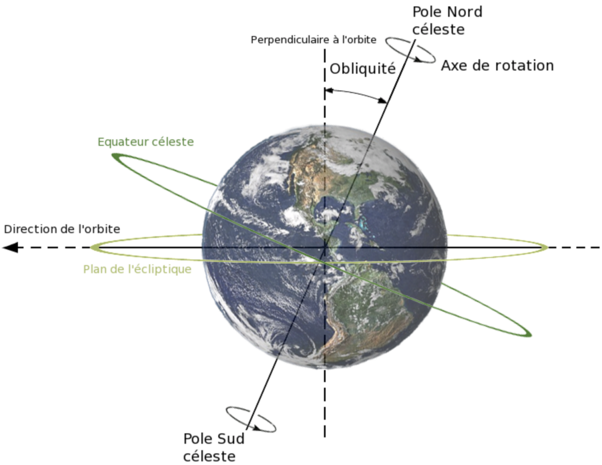
Transformations géométriques de l'espace

Une **transformation de l'espace** est une application qui associe à tout point de l'espace un unique point de l'espace (c.à.d. une application bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$)

Exemple

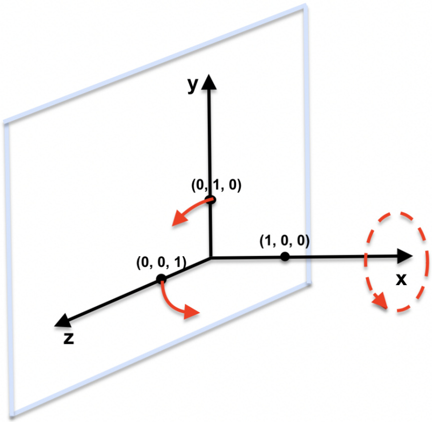
- identité : $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$
- translations de vecteur v: $(x, y, z) \mapsto (x + v_1, y + v_2, z + v_3)$

Rotations dans l'espace



source Wikipedia

Rotations dans l'espace



Rotation autour de l'axe Ox

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Oy

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(\theta) & 0 & sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Oz

$$R_z = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Réflexions dans l'espace

Réflexion par rapport au plan (Oxy)

c'est la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$ de matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Réflexion par rapport au plan (Oxz)

c'est l'application de matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Réflexion par rapport au plan (Oyz)

c'est l'application de matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$