Rapport de stage de L3

Sémantique 2-catégorique des langages de programmation

Travail encadré par Tom Hirschowitz

Aurore Alcolei

25 août 2013

Introduction

Ce rapport présente une partie du travail effectué au LAMA (Labaratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie) dans le cadre du stage de fin de L3, sous la direction de Tom Hirschowitz. Le fil directeur de ce stage était la sémantique 2-catégorique des langages de programmation, un "outil" visant à décrire de manière générale la sémantique de ces langages. Le stage avait pour objectif d'être une introduction à la théorie des catégories appliquée au domaine informatique. J'ai donc tout d'abord pris connaissance des travaux déjà effectués dans ce domaine puis j'ai cherché à comprendre l'approche spécifique proposée dans l'article [1], en explicitant notamment des preuves laissées aux lecteurs. Enfin, à l'aide de mon tuteur, j'ai construit une 2-signature pour le λ-calcul en appel par valeur afin de donner un exemple d'application aux résultats de l'article [1].

Dans un premier temps je présenterai donc quelques notions de la théorie des catégories nécessaires à la compréhension de l'article, puis je donnerai l'idée générale de cet article. Enfin j'illustrerai son application par la donnée d'une 2-signature pour le λ-calcul en appel par valeur.

1 Prérequis

Cette partie présente uniquement les notions catégoriques de bases nécessaires pour comprendre le contenu de l'article [1]. On évince donc un certain nombre de "petits" résultats intéressants du point de vue de la théorie mais qui alourdiraient ce rapport.
La majorité des résultats présentés sont tirés des livres d'introduction [4] et [2].

1.1 Catégorie et Foncteur

La définition formelle d'une catégorie est la suivante, elle généralise la notion de monoïde et de préordre en mathématique :

Définition 1 (Catégorie)**.** Une catégorie $\mathbf{C}$ est la donnée d'une classe d'*objets*, $Ob(\mathbf{C}) = A, B, C, \ldots$; d'une classe de *morphismes* pour chaque couple d'objets (A, B), cette classe est notée $\mathbf{C}(A, B)$ et contient les morphismes de A vers B ; d'une *loi de composition* $\circ$ sur les morphismes, telle que les propriétés suivantes sont respectées :

1. pour tout A, B, $f \in \mathbf{C}(A, B)$ et $g \in \mathbf{C}(B, C) \implies g \circ f \in \mathbf{C}(A, C)$
2. pour tout A, il existe $1_A \in \mathbf{C}(A, A)$ tel que $\begin{cases} \forall f \in \mathbf{C}(A, B) f \circ 1_A = f \\ \forall g \in \mathbf{C}(B, A)\ 1_A \circ g = g \end{cases}$
3. pour tout f, g, h, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- On note $Mor(\mathbf{C})$ la classe de tous les morphismes de la catégorie.
- Pour $f \in \mathbf{C}(A, B)$ On dit que A est le *domaine* de f et B son *co-domaine*.

$Ob(\mathbf{C})$, $Mor(\mathbf{C})$ et $\mathbf{C}(B, A)$ ne sont pas nécessairement des ensembles, c'est pourquoi on a la classification suivante :

- $\mathbf{C}$ est dite *petite* si $Ob(\mathbf{C})$ et $Mor(\mathbf{C})$ sont des ensembles. C'est par exemple le cas des catégories finies*, ayant un nombre fini d'objets et de morphismes*. Par opposition on dit sinon que les catégories sont *grandes*.
- $\mathbf{C}$ est dite *localement petite* si $\forall a, b$, $\mathbf{C}(a, b)$ est un ensemble. C'est le cas de la plupart des catégories que nous regarderons. Dans ce cas, on appelle *hom-set* de (A, B) l'ensemble des morphismes de A vers B.

Quelques exemples et constructeurs de catégorie

— Des catégories finies : (on ne représente que le graphe sous-jacent)

0	**1**	**2**	**3** (triangle)	**4** (square)	etc.
	$\circ$	$\circ \longrightarrow \star$	$\begin{matrix} \circ & \longrightarrow & \star \\ & \searrow & \downarrow \\ & & * \end{matrix}$	$\begin{matrix} \circ & \longrightarrow & \star \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & * \end{matrix}$	...

— **Ens** la catégorie ayant pour objets les ensembles et pour morphismes les fonctions. La composition est la composition des fonctions et pour $A \in \mathbf{Ens}, 1_A = id_A$.

— **Cat** la catégorie des catégories petites, avec pour morphismes les foncteurs munis de leur composition (cf. def 4) et pour identité de $C \in \mathbf{Cat}$ le foncteur 1_C tel que $1_C(c) = c$ et $1_C(f) = f$ pour $c \in Obj(C)$ et $f \in Mor(C)$.

— N'importe quel monoïde : Il a un unique objet et ses morphismes sont ses éléments (la composition correspond alors à l'opérateur de composition du monoïde et $1_M = e$).
Remarque : pour n'importe quelle catégorie $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}(A, A)$ est un monoïde, donc une catégorie.

— **Mon** : la catégorie des monoïdes, ayant pour morphismes les morphismes de monoïdes.

— $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ Le *produit* de deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ dont les objets (C, D) sont les couples formés par les objets C de $\mathbf{C}$ et D de $\mathbf{D}$ et tel que $\mathbf{C} \times \mathbf{D}((C, D),(C', D'))$ contient les couples (f, g) formés par les morphismes f de $\mathbf{C}(C, C')$ et g de $\mathbf{D}(D, D')$. La loi de composition est ensuite la composition composante par composante et $id_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$.

— $\mathbf{C}^{op}$ La *catégorie duale* d'une catégorie $\mathbf{C}$ qui a les mêmes objets que $\mathbf{C}$ et telle que $\mathbf{C}^{op}(C, C') = \mathbf{C}(C', C)$. La loi de composition est inversée par rapport à celle de la catégorie $\mathbf{C}$ et chaque objet garde la même identité. En d'autre terme, si on note $\bar{C}$ l'objet correspondant à $C \in \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}^{op}$ et $\bar{f} \in \mathbf{C}^{op}(\bar{C}, \bar{C}')$ le morphisme correspondant à $f \in \mathbf{C}(C', C)$ on a $\bar{f} \circ \bar{g} = \overline{g \circ f}$ et $1_{\bar{C}} = 1_C$.

Il existe un vocabulaire étendu pour spécifier différentes notions sur les morphismes. On donne ici les définitions de morphismes parallèles et d'isomorphisme :

Définition 2. Deux morphismes sont dit *parallèles* s'ils ont les mêmes domaine et codomaine.

Définition 3. On dit que $f \colon A \to B$ est un *isomorphisme* de $\mathbf{C}$ si il existe $g \colon B \to A$ tel que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$. On peut montrer comme on l'imagine que g est unique.

Un foncteur est une application d'une catégorie vers une catégorie qui respecte la structure des catégories, il peut donc être vu comme un morphisme de catégorie.

Définition 4 (Foncteur)**.** Un foncteur $\mathcal{F} \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ est une application des objets de $\mathbf{C}$ vers ceux de $\mathbf{D}$ et des morphismes de $\mathbf{C}$ vers ceux de $\mathbf{D}$ telle que :

1. pour $f \in \mathbf{C}(A, B)$ on a $\mathcal{F}(f) \in \mathbf{D}(\mathcal{F}(A), F(B))$
2. pour $A \in \mathbf{C}$, $\mathcal{F}(1_A) = 1_{F(A)}$
3. pour $f, g \in Mor(\mathbf{C})$, $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

Exemples :

- Le foncteur $\mathcal{M}\colon \mathbf{Sets} \to \mathbf{Mon}$ qui à un ensemble associe le monoïde ayant pour ensemble support cet ensemble et pour opérateur la concaténation. L'image par $\mathcal{M}$ d'un morphisme f entre deux ensembles est alors directement donner par l'action de f sur ces ensembles :

$$\begin{array}{rccl} M\colon & \mathbf{Sets} & \longrightarrow & \mathbf{Mon} \\ & A & \longmapsto & (A, ., \varepsilon) \\ & f\colon A \to B & \longmapsto & \mathcal{M}(f)\colon (A, ., \varepsilon) \;\to\; (B, ., \varepsilon) : \left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon & \mapsto & \varepsilon \\ a \in A & \mapsto & f(a) \\ m.n & \mapsto & \mathcal{M}(f)(m).\mathcal{M}(f)(n) \end{array} \right. \end{array}$$

- Le foncteur $\mathcal{F}\colon \mathbf{Mon} \to \mathbf{Sets}$ qui à un monoïde $(A, \circ, e)$ associe l'ensemble A^* des éléments générés par ce monoïde ($A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_1 \circ \ldots \circ a_n \mid a_i \in A\}$).
  Pour $f \in \mathbf{Mon}((A, \circ_A, e), (B, \circ_B, e'))$ on a $\mathcal{F}(f)(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathcal{F}(A)$.

On peut également se donner une notion de morphisme de foncteurs :

Définition 5 (Transformation Naturelle)**.** Une transformation naturelle $\alpha\colon \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{G}$ entre deux foncteurs $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ correspond à une famille $(\alpha_X\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X))_{X\in\mathbf{C}}$ de morphismes de $\mathbf{D}$ telle que $\forall f \in \mathbf{C}(X, Y)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ \mathcal{G}(X) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(Y) \end{tikzcd}$$

commute.

On note

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{D} \end{tikzcd}$$

Si $\forall X \in \mathbf{C}$, α_X est un isomorphisme dans $\mathbf{D}$ alors on dit que α est un *isomorphisme naturel* et on note $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, c'est une relation d'équivalence sur les foncteurs. Cette notion nous permet également de définir celle d'*équivalence de catégorie* :

Définition 6. On dit que deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont *équivalentes* ($\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$) si il existe deux foncteurs $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $\mathcal{G}\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tels que $\mathcal{G}\mathcal{F} \cong 1_C$ et $\mathcal{F}\mathcal{G} \cong 1_D$.
Dans le cas particulier où $\mathcal{G}\mathcal{F} = 1_C$ et $\mathcal{F}\mathcal{G} = 1_D$, on dira que $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont *isomorphes*.

1.2 Adjonction et Monade

Définition 7. On appelle adjonction entre deux catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ la donnée de deux foncteurs $\mathcal{L}\colon \mathbf{C} \rightleftarrows D\colon \mathcal{R}$ et d'une transformation naturelle $\eta\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow \mathcal{R}\mathcal{L}$ telle que $\forall C \in \mathbf{C}, \forall D \in \mathbf{D}$, si $f \in \mathbf{C}(C, \mathcal{R}(D))$ alors $\exists! f' \in \mathbf{D}(\mathcal{L}(C), D)$ tel que

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{R}\mathcal{L}(C) \arrow[d, "\mathcal{R}(f')"] \\ & \mathcal{R}(D) \end{tikzcd}$$

commute.

On dit que η est l'*unité* de l'adjonction. On note $\mathcal{L} \dashv \mathcal{R}$ ou

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{D} \arrow[l, bend left, "\mathcal{R}"] \end{tikzcd}$$

le fait que $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{R}$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche).

Exemple. Les foncteurs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ de l'exemple précedent sont adjoints ($\mathcal{M} \dashv \mathcal{F}$) : pour tout $X \in \mathbf{Sets}$ on prend $\eta_X\colon X \to \mathcal{F}\mathcal{M}(X)$ tel que $\eta_X(x) = x$, x vu comme un mot singleton. Pour $f\colon X \to \mathcal{F}(A, \circ, e)$ on a ensuite $f'\colon (X, ., \varepsilon) \to (A, \circ, e) : \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \mapsto e \\ x \in X \mapsto f(x) \\ a.b \mapsto f'(a) \circ f'(b) \end{array} \right.$

Pour $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ et $\mathcal{G}\colon \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ des foncteurs entre deux catégories localement petites on peut définir les foncteurs $\mathcal{H}om_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}\mathbf{C}, \mathbf{D})$ et $\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathcal{G}\mathbf{D})$ tels que :

$$\begin{array}{llcl}
\mathcal{H}om_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}\mathbf{C},\mathbf{D})\colon & \mathbf{C}^{op}\times\mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{Sets}\\
& (\bar{C},D) & \longmapsto & \mathbf{D}(\mathcal{F}(C),D)\\
& (\bar{f},g)\colon(\bar{C},D)\to(\bar{C}',D') & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} h\colon \mathbf{D}(\mathcal{F}(C),D) & \to \mathbf{D}(\mathcal{F}(C'),D')\\ \quad\quad l & \mapsto g\circ l\circ\mathcal{F}(f))\end{array}\right.\\
\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathbf{C},\mathcal{G}\mathbf{D})\colon & \mathbf{C}^{op}\times\mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{Sets}\\
& (\bar{C},D) & \longmapsto & \mathbf{D}(C,\mathcal{G}(D))\\
& (\bar{f},g)\colon(\bar{C},D)\to(\bar{C}',D') & \longmapsto & h'\colon l\mapsto\mathcal{G}(g)\circ l\circ f
\end{array}$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{L}\colon \mathbf{C}\rightleftarrows D\colon\mathcal{R}$ deux foncteurs, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{L}$ est un adjoint à gauche de $\mathcal{R}$*
2. *Il existe un isomorphisme naturel ϕ tel que $\mathcal{H}om_{\mathbf{D}}(\mathcal{L}\mathbf{C},\mathbf{D})\cong\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathbf{C},\mathcal{R}\mathbf{D})$.*
3. *Il existe $\varepsilon\colon\mathcal{L}\mathcal{R}\Longrightarrow 1_{\mathbf{D}}$ une transformation naturelle telle que $\forall C\in\mathbf{C},\forall D\in\mathbf{D}$, si $g\in\mathbf{D}(\mathcal{L}(C),D)$ alors $\exists! g'\in\mathbf{C}(C,\mathcal{R}(D))$ tel que* $\begin{tikzcd} \mathcal{L}(C) \arrow[r, "\mathcal{L}(g')"] \arrow[dr, "g"'] & \mathcal{L}\mathcal{R}(D) \arrow[d, "\varepsilon_D"] \\ & D \end{tikzcd}$ *commute.*

On appelle co-unité *de l'adjonction la transformation naturelle ε*

Remarque. Pour une adjonction donnée on a les relations suivantes entre η, ϕ et ε :

$\cdot\ \eta_C=\phi_{(C,\mathcal{L}(C))}(1_{\mathcal{L}(C)})$ $\quad\cdot\ \phi_{(C,D)}(g)=\mathcal{R}(g)\circ\eta_C$

$\cdot\ \varepsilon_D=\phi^{-1}_{(\mathcal{R}(D),D)}(1_{\mathcal{R}(D)})$ $\quad\cdot\ \phi^{-1}_{(C,D)}(f)=\varepsilon_D\circ\mathcal{L}(f)$

C'est par ces relations là que les preuves de la proposition précedente sont construites.

Ces relations nous donne également les égalités suivantes :

$$1_{\mathcal{L}(C)}=\phi^{-1}_{(C,\mathcal{L}(C))}(\eta_C)=\varepsilon_{\mathcal{L}(C)}\circ\mathcal{L}(\eta_C)\qquad\text{et}\qquad 1_{\mathcal{R}(D)}=\phi_{(\mathcal{R}(D),D)}(\varepsilon_D)=\mathcal{R}(\varepsilon_D)\circ\eta_{\mathcal{R}(D)}$$

schématisées par les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(C) \arrow[rr, "1_{\mathcal{L}(C)}"] \arrow[dr, "\mathcal{L}(\eta_C)"'] & & \mathcal{L}(C) \\ & \mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(C) \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathcal{L}(C)}"'] & \end{tikzcd}\quad (1)\quad \text{et}\quad \begin{tikzcd} \mathcal{R}(D) \arrow[rr, "1_{\mathcal{R}(D)}"] \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{R}(D)}"'] & & \mathcal{R}(D) \\ & \mathcal{R}\mathcal{L}\mathcal{R}(D) \arrow[ur, "\mathcal{L}(\varepsilon_D)"'] & \end{tikzcd}\quad (2)$$

On a alors facilement une nouvelle équivalence :

Proposition 2. *Pour $\mathcal{L}\colon\mathbf{C}\rightleftarrows D\colon\mathcal{R}$, $\eta\colon 1_{\mathbf{C}}\Longrightarrow\mathcal{R}\mathcal{L}$ et $\varepsilon\colon 1_D\Longrightarrow\mathcal{L}\mathcal{R}\mathbf{D}$ donnés, on a l'adjonction $\mathcal{L}\dashv\mathcal{R}$ avec η et ε pour unité et co-unité ssi (1) et (2) sont vérifiées.*

Preuve. Par la remarque précédente on a l'implication de droite. Faisons celle de gauche :

Supposons *(1)* et *(2)* vraies. On cherche à construire un isomorphisme naturel $\phi\colon\mathcal{H}om_{\mathbf{D}}(\mathcal{L}\mathbf{C},\mathbf{D})\cong\mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathbf{C},\mathcal{R}\mathbf{D})$. On pose pour tout $C\in\mathbf{C},D\in\mathbf{D}$: $\phi_{(C,D)}(f)=\mathcal{R}(f)\circ\eta_C$ et $\psi_{(C,D)}(g)=\varepsilon_D\circ\mathcal{L}(g)$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
\phi_{(C,D)}(\psi_{(C,D)}(g)) & = & \mathcal{R}(\varepsilon_D\circ\mathcal{L}(g))\circ\eta_C & \\
& = & \mathcal{R}(\varepsilon_D)\circ\mathcal{R}\mathcal{L}(g)\circ\eta_C & \\
& = & \mathcal{R}(\varepsilon_D)\circ\eta_{\mathcal{R}(D)}\circ g & \text{naturalité de } \eta\\
& = & g & (2)
\end{array}$$

De même on montre $\psi_{(C,D)}(\phi_{(C,D)}(f))=f$ par naturalité de ε et grâce à *(1)*.

On a donc $\psi_{(C,D)}=\phi^{-1}_{(C,D)}$ pour tout C et D.

Par ailleurs ϕ est naturel : pour $(\bar{f},g)\in\mathbf{C}^{op}\times\mathbf{D}((\bar{C},D),(\bar{C}',D'))$ on a

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D}(\mathcal{L}(C),D) \arrow[r, "g\circ\_\circ\mathcal{L}(f)"] \arrow[d, "\phi_{(C,D)}"'] & \mathbf{D}(\mathcal{L}(C'),D') \arrow[d, "\phi_{(C',D')}"] \\ \mathbf{C}(C,\mathcal{R}(D)) \arrow[r, "\mathcal{R}(g)\circ\_\circ f"'] & \mathbf{C}(C',\mathcal{R}(D')) \end{tikzcd}$$

En effet, pour $h \in \mathbf{D}(\mathcal{L}(C), D)$ on a

$$\begin{aligned}
\phi_{(C',D')} \circ (g \circ h \circ \mathcal{L}(f)) &= \mathcal{R}(g \circ h \circ \mathcal{L}(f)) \circ \eta_{C'} \\
&= \mathcal{R}(g) \circ \mathcal{R}(h) \circ \mathcal{R}\mathcal{L}(f)) \circ \eta_{C'} \\
&= \mathcal{R}(g) \circ \mathcal{R}(h) \circ \eta_C \circ f && \text{naturalité de } \eta \\
&= (\mathcal{R}(g) \circ _ \circ f) \circ \phi_{(C,D)}(h)
\end{aligned}$$

Au final on a bien ϕ un isomorphisme naturel pour $\mathcal{H}om_{\mathbf{D}}(\mathcal{L}\mathbf{C}, \mathbf{D}) \cong \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}, \mathcal{R}\mathbf{D})$. $\square$

Les notions d'adjonction et de monade sont très liées en effet,

Définition 8 (Monade)**.** On appelle monade un endofoncteur $\mathcal{T} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ muni de deux transformations naturelles $\eta\colon 1_{\mathbf{C}} \Longrightarrow \mathcal{T}$ et $\mu\colon \mathcal{T}^2 \Longrightarrow \mathcal{T}$ telles que les diagrammes suivants comutent pour tout $X \in \mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^3(X) \arrow[r, "\mathcal{T}(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_X"'] & \mathcal{T}^2(X) \arrow[d, "\mu_{T(X)}"] \\
\mathcal{T}^2(X) \arrow[r, "\mu_X"'] & \mathcal{T}(X)
\end{tikzcd} \quad (1)
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[dr, "1_{T(X)}"'] & \mathcal{T}^2(X) \arrow[d, "\mu_X"] & \mathcal{T}(X) \arrow[l, "\mathcal{T}(\eta_X)"'] \arrow[dl, "1_{T(X)}"] \\
 & \mathcal{T}(X) &
\end{tikzcd}$$

(2) *(3)*

Proposition 3. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ est une monade.*
2. *Il existe une catégorie $\mathbf{D}$ et deux foncteurs $\mathcal{L}\colon \mathbf{C} \rightleftarrows \mathbf{D}\colon \mathcal{R}$ tels que $T = RL$ et $\mathcal{L} \dashv \mathcal{R}$ avec η pour unité et $\mathcal{R}(\varepsilon_{\mathcal{L}})$ pour co-unité.*

Preuve. La deuxième implication est aisée : il suffit de vérifier que T, η et μ respectivement définies par $\mathcal{R}\mathcal{L}$, η et $\mathcal{R}(\eta_{\mathcal{L}})$ vérifie les propriétés *(1), (2)* et*(3)* de la définition 8 :

· *(1)* s'obtient en appliquant $\mathcal{R}$ au diagramme obtenu par naturalité de ε appliquée à $\varepsilon_{\mathcal{L}(C)}\colon \mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{L}(C) \to \mathcal{L}(C)$.

· De la même manière, *(2)* et *(3)* s'obtiennent en réutilisant les égalités de la proposition 2 en appliquant $\mathcal{R}$ à la première et en prenant $D = \mathcal{F}(C)$ pour la seconde.

L'implication $1 \implies 2$ nous intéresse plus car elle met en jeu la construction d'une adjonction particulère utilisant la catégorie $\mathbf{C}^T$des $\mathcal{T}$-algèbres :

Les objets de $\mathbf{C}^{\mathcal{T}}$ sont les $\mathcal{T}$-*algèbres* de $\mathcal{T}$ c'est à dire des couples (A, α) tels que $A \in \mathbf{C}$, $\alpha\colon \mathcal{T}(A) \to A$ et tels que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}^2(A) \arrow[r, "\mathcal{T}(\alpha)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \mathcal{T}(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{T}(A) \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "1_A"'] & \mathcal{T}(A) \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd}$$

commutent.

Les morphismes $h\colon (A, \alpha) \to (B, \beta)$ de $\mathbf{C}^{\mathcal{T}}$ sont les morphismes de $\mathbf{C}(A, B)$ tels que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(A) \arrow[r, "\mathcal{T}(h)"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{T}(B) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

commute. La loi de composition est celle de $\mathbf{C}$, idem pour les identités.

On peut alors définir une adjonction canonique en prenant $\mathcal{L}, \mathcal{R}$, η et ε définis par :

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{L}\colon & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}^T \\
 & C & \longmapsto & (\mathcal{T}(C), \mu_C) \\
 & f\colon C \to D & \longmapsto & \mathcal{T}(f)
\end{array}$$

En effet on a bien $(\mathcal{T}(C), \mu_C)$ est une $\mathcal{T}$-algèbre par les propriétés *(1)* et *(2)* de la monade et $\mathcal{T}(h)$ est un morphisme de $(\mathcal{T}(C), \mu_C) \to (\mathcal{T}(D), \mu_D)$ car c'est un morphisme de $\mathbf{C}(\mathcal{T}(C), \mathcal{T}(D))$ tel que $\mu_D \circ \mathcal{T}(\mathcal{T}(h)) = \mathcal{T}(h) \circ \mu_C$ par naturalité de μ.

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{R}\colon & \mathbf{C}^T & \longrightarrow & \mathbf{C} \\
 & (A, \alpha) & \longmapsto & A \\
 & h\colon (A, \alpha) \to (B, \beta) & \longmapsto & h\colon A \to B
\end{array}$$

$\mathcal{R}(h)$ est bien défini par définition de morphisme de $\mathcal{T}$-algèbres.

$$\eta' = \eta \quad \text{et} \quad \varepsilon_{(A,\alpha)} = \alpha$$

η' est du bon type car $\mathcal{RL}(C) = \mathcal{R}(T(C), \mu_C) = \mathcal{T}(C)$. De même α est un bien un morphisme de $\mathcal{T}$-algèbres de $(\mathcal{T}(A), \mu_A) \to (A, \alpha)$ puisque par définition des $\mathcal{T}$-algèbres $\alpha \circ \mathcal{T}(\alpha) = \alpha \circ \mu_A$. On vérifie aussi que ε est naturelle car pour tout $h\colon (A,\alpha) \to (B,\beta)$ on a $h \circ \varepsilon_{(A,\alpha)} = \varepsilon_{(B,\beta)} \circ \mathcal{T}(h)$ par le fait que h est un morphisme de $\mathcal{T}$-algèbre. Par ailleurs les propriétés *(1)* et *(2)* de la proposition 2 sont satisfaites en considérant la propriété *(3)* de la monade dans les $\mathcal{T}$-algèbres et en applicant $\mathcal{RL}$ au diagramme triangulaire caractérisant les $\mathcal{T}$-algèbres respectivement.

On a donc bien construit une adjonction telle que $\mathcal{T} = \mathcal{RL}$, $\eta = \eta'$ et $\mu = \mathcal{R}\varepsilon_{\mathcal{F}}$, puisque $\mathcal{R}\varepsilon_{\mathcal{F}(C)} = \mathcal{R}\varepsilon_{(\mathcal{T}(C),\mu_C)} = \mathcal{R}(\mu_C) = \mu_C$ pour tout $C \in \mathbf{C}$. $\square$

1.3 Produit cartésien et Exponentielle ou les CCC

Afin de terminer notre tour d'horizon des notions nécessaires pour aborder le sujet, nous allons maintenant inroduire quelques structures catégoriques : le produit cartésien et l'exponentielle.

Pour appréhender la notion de produit cartésien dans les catégories on peut la considérer comme généralisant celle connue dans les ensembles. D'ailleurs dans **Sets** le produit cartésien des ensembles est un produit cartésien pour la catégorie.

Définition 9 (Produit Cartésien)**.** Soit A et B deux objets d'une catégorie $\mathbf{C}$, on appelle produit cartésien de A et B la donnée d'un objet $P \in \mathbf{C}$ et deux morphismes $\pi, \pi' : A \xleftarrow{\pi} P \xrightarrow{\pi'} B$ tels que

$\forall x_1, x_2 : A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$, $\exists!\ u\colon X \to P$ tel que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] & B \end{tikzcd}$$

commute.

On note générallement $P = A \times B$ et $u = \langle x_1, x_2 \rangle$

Remarque. Le produit cartésien de deux objets est unique à ismorphisme près.

Si une catégorie $\mathbf{C}$ est muni d'un produit cartésien pour chacune de ses paires d'objets alors on peut définir un foncteur $\_ \times \_\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ qui à chaque paires (A, B) de $\mathbf{C}$ associe un des produits cartésiens de A et B et à chaque paires de morphismes $(f_1, f_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}((A,B),(C,D))$ associe $f_1 \times f_2 = \langle f_1 \circ \pi, f_2 \circ \pi' \rangle$ qui appartient bien à $\mathbf{C}(A \times B, C \times D)$.

On a :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f_1"'] & A \times B \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\langle f_1 \circ \pi, f_2 \circ \pi' \rangle"'] & B \arrow[d, "f_2"] \\ C & C \times D \arrow[l] \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

On appelle $\times$ le *produit binaire* de $\mathbf{C}$, il est unique à isomorphisme près.

La notion de produit cartésien se généralise pour une arité quelquonque :

Définition 10. $P = A_1 \times \cdots \times A_n$ muni de n morphismes $\pi_i\colon P \to A_i$ est un produit cartésien pour la familles d'objets $(A_i)_n$ si, pour tout $X \in \mathbf{C}$ muni de n morphismes $x_i\colon X \to A_i$, il existe un unique morphisme $h = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle : X \to P$ tel que $\forall i$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "x_i"] & \\ P \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

commute.

Pour une catégorie munie d'un produit binaire, il est facile de définir un produit n-aire pour $n \geq 2$ en posant $A_1 \times \ldots \times A_n = (\ldots(A_1 \times A_2) \ldots \times A_n)$ qui vérifie bien les propriétés ci-dessus. Par ailleurs, le produit unaire d'un objet sera simplement l'objet lui-même. Enfin si la catégorie possède un *objet terminal* alors celui là peut représenter le *produit nul* (construit à partir d'aucun objet). En effet, dans une catégorie $\mathbf{C}$ on dit qu'un objet I est terminal si $\forall C \in \mathbf{C}, \mathbf{C}(C, I) \simeq \{1\}$ c'est à dire que pour tout objets de $\mathbf{C}$, il existe un unique morphisme $!\colon C \to I$.

On peut ainsi définir ce qu'est une catégorie à produits finis :

Définition 11. Une catégorie $\mathbf{C}$ est dite à produits finis si elle possède un produit binaire $(\times)$ et un élément terminal (I).

On dira alors qu'un foncteur $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre deux telles catégories *préserve les produits finis* si $\mathcal{F}(I_{\mathbf{C}}) = I_{\mathbf{D}}$ et $\forall A, B \in \mathbf{C}, \begin{cases} \mathcal{F}(A \times_{\mathbf{C}} B) = \mathcal{F}(A) \times_{\mathbf{D}} F(B) \\ \mathcal{F}(\pi_{A\times B}) = \pi_{\mathcal{F}(A\times B)} \\ \mathcal{F}(\pi'_{A\times B}) = \pi'_{\mathcal{F}(A\times B)} \end{cases}$

Remarque. Pour une catégorie $\mathbf{C}$ à produits finis, si $\mathbf{C}$ est localement petite alors $\mathbf{C}(X, A \times B) \cong \mathbf{C}(X, A) \times \mathbf{C}(X, B)$ (ismorphisme vu dans **Sets**)

La notion d'exponentielle est définie à partir de celle du produit binaire :

Définition 12. Pour $\mathbf{C}$ une catégorie munie d'un produit binaire, on appelle exponentielle de deux objets B et A la donnée d'un objet $B^A \in \mathbf{C}$ et d'un morphisme $ev : B^A \times A \to B$ tel que $\forall f\colon C \times A \to B$, il existe un unique $\tilde{f}\colon C \to B^A$ telle que

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[r, "ev"] & B \\ C \times A \arrow[u, "\tilde{f}\times 1_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Cette définition généralise dans les catégories la notion d'exponentielle que nous pouvons avoir grâce aux ensembles. D'ailleurs, la catégorie **Sets** est bien munie d'une exponentielle pour chacune de ses paires d'objets (A, B) : on prend $B^A = \{f\colon A \to B\}$ et $ev(f, a) = f(a)$

On a également : si $\mathbf{C}$ est localement petite alors $\mathbf{C}(A \times B, C) \cong \mathbf{C}(A, C^B)$.

Définition 13 (CCC)**.** On dit qu'une catégorie est cartésienne fermée (CC) si elle est à la fois munie des produits finis et d'une exponentielle pour chacune de ses paires d'objets.

Un foncteur $\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ sera dit *cartésien fermé* si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont CC et que $\mathcal{F}$ préserve à la fois les produits finis et l'exponentielle, c'est à dire que $\forall A, B, \mathcal{F}(B^A) = \mathcal{F}(B)^{\mathcal{F}(A)}$ et $\mathcal{F}(ev_{B^A}) = ev_{\mathcal{F}(B^A)}$. On abrégera en disant que $\mathcal{F}$ est un CC-foncteur.

Définition 14. On appelle **CCCAT** la catégorie ayant pour objets les petites catégories cartésiennes fermées et pour morphismes les foncteurs entre ces catégories.

Cette catégorie est bien définie puisque la composition entre deux CC-foncteurs donne un CC-foncteur et le foncteur identité sur une CC-catégorie est également un CC-foncteur.

1.4 2-Catégories et 2-CCC

On va maintenant présenter la notion de 2-catégorie. On peut voir ces catégories comme des catégories munies d'une notion de morphisme entre morphismes parallèles. On va d'abord donner une définition officielle pour ce type de catégorie puis une définition équivalente mettant en évidence ce point de vue :

Définition 15 (2-Catégorie)**.** Une catégorie $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie si

1. $\forall A, B \in \mathbf{C}, \mathbf{C}(A, B)$ est une catégorie petite.
2. $\forall A, B, C \in \mathbf{C}, \exists m_{ABC}\colon \mathbf{C}(A, B) \times \mathbf{C}(B, C) \longrightarrow \mathbf{C}(A, C)$ et $e_A\colon 1 \longrightarrow \mathbf{C}(A, A)$ tel que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}(A,B) \times \mathbf{C}(B,C) \times \mathbf{C}(C,D) \arrow[r, "\mathbf{C}(A,B)\times m_{BCD}"] \arrow[d, "m_{ABC}\times \mathbf{C}(c,D)"'] & C(A,B) \times \mathbf{C}(B,D) \arrow[d, "m_{ABD}"] \\ C(A,C) \times \mathbf{C}(C,D) \arrow[r, "m_{ACD}"'] & C(A,D) \end{tikzcd}$$

et
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(A,B) \arrow[r, "\langle id, e_B \circ ! \rangle"] \arrow[d, "\langle e_A \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "id"] & C(A,B) \times \mathbf{C}(B,B) \arrow[d, "m_{ABB}"] \\
C(A,A) \times \mathbf{C}(A,B) \arrow[r, "m_{AAB}"'] & C(A,B)
\end{tikzcd}$$
commutent,

avec ! représentant l'unique foncteur de $\mathbf{C}(A,B)$ vers 1, l'objet terminal de $\times$ pour les petites catégories.

Définition 16 (traduction)**.** Une 2-Catégorie est une catégorie localement petite $\mathbf{C}$ munie pour toutes paires de morphismes $f, g : A \rightrightarrows B$ d'un ensemble $\mathbf{C}(f,g)$ de morphismes (ou *2-cellules*) entre f et g. $\mathbf{C}$ est également munie de deux lois de composition sur les 2-cellules, $\circ$ et $\bullet$, respectivement appelées *composition verticale et horizontale* telles que :

1. Pour chaque paire d'objets (A,B), $\mathbf{C}(A,B)$ est une catégorie petite ayant pour objets les morphismes de A vers B également appelés *1-cellules* de A vers B, pour loi de composition la composition verticale sur les 2-cellules et pour morphismes entre $f, g : A \rightrightarrows B$ l'ensemble $\mathbf{C}(f,g)$. L'identité f, notée 1_f, est un morphisme de $\mathbf{C}(f,f)$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbf{C}(f,g)$, $\beta \in \mathbf{C}(g,f)$, $\alpha \circ 1_f = \alpha$ et $1_f \circ \beta = \beta$.
2. La composition horizontale admet les propriétés suivantes :
   — loi interne : $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "fg"] \arrow[r, bend right, "f'g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\bullet\beta"] & C \end{tikzcd}$

   — associativité : $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "gh"] \arrow[r, bend right, "g'h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\bullet\gamma"] & C \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "fg"] \arrow[r, bend right, "f'g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\bullet\beta"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & C \end{tikzcd}$

   — élément neutre : $\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "1_A"] \arrow[r, bend right, "1_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{1_A}"] & A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "1_B"] \arrow[r, bend right, "1_B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_{1_B}"] & B \end{tikzcd}$
3. Loi d'échange : $\forall \alpha \in \mathbf{C}(A,B)(f_1,f_2), \alpha' \in \mathbf{C}(A,B)(f_2,f_3), \beta \in \mathbf{C}(B,C)(g_1,g_2), \beta' \in \mathbf{C}(B,C)(g_2,g_3)$, on a $(\beta' \bullet \alpha') \circ (\beta \bullet \alpha) = (\beta' \circ \beta) \bullet (\alpha' \circ \alpha)$

On peut étendre la notion de produit cartésien et d'exponentielle aux 2-catégories afin qu'elles prennent en compte les morphismes de morphismes. On demande alors :

Définition 17.

· $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie à produits finis si à chaque $A \in \mathbf{C}$ est associé un isomporphisme naturel $\psi_A \colon \mathbf{C}(A,1) \cong \mathbf{1}$ et si $\mathbf{C}$ est munie d'un produit binaire, $\times$, tel qu'à chaque triplet $A,B,C \in \mathbf{C}$ est associé un isomorphisme naturel $\phi_{(A,B,C)} \colon \mathbf{C}(C, A \times B) \cong \mathbf{C}(C,A) \times \mathbf{C}(C,B)$.

· De même, $\mathbf{C}$ est une 2-catégorie à produits finis munie de l'exponentielle si à chaque $A,B,C \in \mathbf{C}$ est associé un isomorphisme naturel $\varphi_{(A,B,C)} \colon \mathbf{C}(A \times B, C) \cong \mathbf{C}(A, C^B)$

On peut finalement définir 2-**CCCAT** comme étant la catégorie des petites 2-catégories cartésiennes fermées. Un 2-foncteur cartésien fermé se devra alors de préserver l'ensemble des structures précedemment décrites.

2 Sémantique 2-Catégorique

Il existe déjà des approches catégoriques permettant de rendre compte de la sémantique des langages avec lieurs. Elles établissent pour ce faire une équivalence entre les modèles d'une signature et les foncteurs sur les catégories à produits finis ou cartésiennes fermées ([2] et [3]).

Ces approches créent un bon cadre pour parler des théories équationnelles, mais elles ne sont pas suffisament fines pour rendre compte de la notion de réécriture.

L'idée de l'article [1] est de se placer une dimension au dessus des **CCC**, dans les 2-CCC, pour raffiner la notion induite de modèle et donc de combler ce manque. Pour ce faire, on améliore la notion de signature en 2-signature en veillant à ce que ces signatures forment toujours une catégorie : **Sig**. On est alors capable d'établir une adjonction de cette catégorie vers la catégorie 2-**CCCAT** et ainsi de définir une notion de modèle pour les 2-signatures. Nous développerons ici la manière dont est construite la catégorie **Sig** et une intuition de l'équivalence entre modèle d'une 2-Signature et foncteur sur les 2-catégories cartésiennes fermées.

2.1 2-Signature, Definition

La notion de 2-signature est construite progressivement à partir de celle de 1-signature.

$$\begin{array}{llll} \text{Soit } \mathcal{L}_0\colon & \mathbf{Sets} & \longrightarrow & \mathbf{Sets} \\ & X & \longmapsto & \{A, B := x \in X \mid A \times B \mid \mathbf{1} \mid B^A\} \\ & f\colon X \to Y & \longmapsto & \mathcal{L}_0 f\colon \mathcal{L}_0 X \to \mathcal{L}_0 Y \text{ tel que } \begin{cases} x \mapsto f(x) \\ A \times B \mapsto (\mathcal{L}_0 f)(A) \times (\mathcal{L}_0 f)(B) \\ \mathbf{1} \mapsto \mathbf{1} \\ B^A \mapsto (\mathcal{L}_0 f)(B)^{(\mathcal{L}_0 f)(A)} \end{cases} \end{array}$$

Lemme 1. $\mathcal{L}_0$ est une monade.

Preuve. On prend $\eta_X = x \mapsto x$ *(inclusion de X dans $\mathcal{L}_0(X)$)* et $\mu_X = \begin{cases} x \in \mathcal{L}_0(X) \mapsto x \\ A \times B \mapsto \mu(A) \times \mu(B) \\ \mathbf{1} \mapsto \mathbf{1} \\ B^A \mapsto \mu(B)^{\mu(A)} \end{cases}$

Définition 18. Soit $X \in$ **Set**, on appelle ensemble des *séquents* sur X l'ensemble $\mathcal{S}_0(X) = \mathcal{L}_0(X)^* \times \mathcal{L}_0(X)$.

Définition 19 (1-Signature)**.** On appelle 1-signature (X_0, X_1) la donnée d'un ensemble de *types de base* (X_0) et d'un ensemble de *constructeurs* (X_1) muni d'une application $\varphi_1\colon X_1 \to \mathcal{S}_0(X_0)$. Pour $X = (X_0, X_1)$ on note $X(\Gamma \vdash A)$ l'ensemble des constructeurs de X_1 ratachés au séquent (Γ, A).

Proposition 4. *On peut définir* $\mathbf{Sig}_1$ *la catégorie des 1-signatures en prenant pour morphismes les paires* $(f_0, f_1)\colon (X_0, X_1) \to (Y_0, Y_1)$ *telles que*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d] \\ \mathcal{S}_0(X_0) \arrow[r, "\mathcal{S}_0(f_0)"'] & \mathcal{S}_0(Y_0) \end{tikzcd} \quad (1) \quad \textit{commute}$$

et pour loi de composition la composition composante par composante.

On va définir l'endofoncteur $\mathcal{L}_1\colon \mathbf{Sig}_1 \longrightarrow \mathbf{Sig}_1$ qui a une signature $X = (X_0, X_1)$ associe la signature $\mathcal{L}_1(X_0, X_1)$, avec $(\mathcal{L}_1(X_0, X_1))_0 = X_0$ et $(\mathcal{L}_1(X_0, X_1))_1 =$ l'ensemble des termes typés, librement engendrés par X, càd. l'ensemble des termes générés par les règles :

$$\frac{}{\Gamma \vdash x\colon A}\,\Gamma(x) = A \qquad \frac{}{\Gamma \vdash ()\colon \mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma, x\colon A \vdash M\colon B}{\Gamma \vdash \lambda x.M\colon B^A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M\colon A \qquad \Gamma \vdash N\colon B}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M\colon B^A \qquad \Gamma \vdash N\colon A}{\Gamma \vdash MN\colon B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M\colon A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M\colon A_i} \qquad \frac{\ldots \qquad \Gamma \vdash M_i\colon \Delta_i \qquad \ldots}{\Gamma \vdash c(\!|M_1, \ldots, M_n|\!)\colon A}\, c \in X(G \vdash A)$$

Les images des morphismes de $\mathbf{Sig}_1$ par $\mathcal{L}_1$ doivent respecter la condition *(1)*, c'est à dire que pour $(f_0, f_1) \in \mathbf{Sig}_1(X, Y)$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1(X)_1 \arrow[r, "\mathcal{L}_1(f_1)"] \arrow[d] & \mathcal{L}_1(Y)_1 \arrow[d] \\ \mathcal{S}_0(\mathcal{L}_1(X)_0) \arrow[r, "\mathcal{S}_0(\mathcal{L}_1(f_0))"'] & \mathcal{S}_0(\mathcal{L}_1(Y)_0) \end{tikzcd}$$

commute.

Comme $\mathcal{L}_1(X)_0 = X_0$ et $\mathcal{L}_1(Y)_0 = Y_0$ on a $\mathcal{L}_1(f_0) = f_0$. En posant $\mathcal{L}_0(f_0) = f_0'$, on peut alors en déduire une expression inductive de $\mathcal{L}_1(f_1)\colon \mathcal{L}_1(X)_1 \longrightarrow \mathcal{L}_1(Y)_1$:

$$\begin{cases} \Gamma \vdash x\colon A & \longmapsto & (f_0')^*(\Gamma) \vdash x\colon f_0'(A) \\ \Gamma \vdash ()\colon \mathbf{1} & \longmapsto & (f_0')^*(\Gamma) \vdash ()\colon \mathbf{1} \\ \Gamma \vdash \lambda x.M\colon B^A & \longmapsto & (f_0')^*(\Gamma) \vdash \lambda x.\mathcal{L}_1(f_1)(M)\colon f_0'(B)^{f_0'(A)} \\ \Gamma \vdash c(\!|M_1,\dots,M_n|\!)\colon A & \longmapsto & (f_0')^*(\Gamma) \vdash f_1(c)(\!|\mathcal{L}_1(f_1)(M_1),\dots,\mathcal{L}_1(f_1)(M_n)|\!)\colon f_0'(A) \\ \dots \end{cases} \tag{2}$$

Cette définition préserve bien les règles de dérivation de types vues précédemment.

On peut par ailleurs remarquer le lemme suivant :

Lemme 2. Pour tout $f\colon X \to Y$, soit $g = \mathcal{L}_1(f)$, on a $g(P[P_1,\dots,P_k]) = g(P)[g(P_1),\dots,g(P_k)]$ pour tout $P, P_1,\dots,P_k \in \mathcal{L}_1(X)$

Preuve. Par induction sur P, tous les cas sont assez bateau. ex :

- Pour $P = \langle M, N\rangle$:

$$\begin{aligned} g(P[P_1,\dots,P_k]) &= g(\langle M[P_1,\dots,P_k], N[P_1,\dots,P_k]\rangle) \\ &= \langle g(M[P_1,\dots,P_k]), g(N[P_1,\dots,P_k])\rangle \\ (\textit{indution}) &= \langle g(M)[g(P_1),\dots,g(P_k)], g(N)[g(P_1),\dots,g(P_k)]\rangle \\ &= g(\langle M,N\rangle)[g(P_1),\dots,g(P_k)] \end{aligned}$$

- Pour $P = c(\!|M_1,\dots,M_n|\!)$:

$$\begin{aligned} g(P[P_1,\dots,P_k]) &= g(c(\!|M_1[P_1,\dots,P_k],\dots,M_n[P_1,\dots,P_k]|\!)) \\ &= f(c)(\!|g(M_1[P_1,\dots,P_k]),\dots,g(M_n[P_1,\dots,P_k])|\!) \\ (\textit{induction}) &= f(c)(\!|g(M_1)[g(P_1),\dots,g(P_k)]),\dots,g(M_n)[g(P_1),\dots,g(P_k)]|\!) \\ &= f(c)(\!|g(M_1),\dots,g(M_n)|\!)[g(P_1),\dots,g(P_k)] \\ &= g(c(\!|M_1,\dots,M_n|\!))[g(P_1),\dots,g(P_k)] \end{aligned}$$

Proposition 5. *$\mathcal{L}_1$ est une monade.*

Preuve. Comme X_0 est préservé par $\mathcal{L}_1$, on ne s'interesse ici qu'à X_1.

Soit $\begin{array}{lccc} \eta_X\colon & X_1 & \longrightarrow & \mathcal{L}_1(X_1) \\ & c \in X(\Delta, A) & \longmapsto & c(\!|x_1,\dots,x_n|\!) \in \mathcal{L}_1(X)(\Delta, A) \end{array}$

et $\mu_X\colon \ \mathcal{L}_1^2(X_1) \longrightarrow \mathcal{L}_1(X_1)$ définie inductivement par :

$$\begin{cases} \Gamma \vdash x\colon A & \longmapsto & \Gamma \vdash x\colon A \\ \Gamma \vdash ()\colon \mathbf{1} & \longmapsto & \Gamma \vdash ()\colon \mathbf{1} \\ \Gamma \vdash \langle M, N\rangle : A \times B & \longmapsto & \Gamma \vdash \langle \mu_X(M), \mu_X(N)\rangle : A \times B \\ \Gamma \vdash \pi_i(M)\colon A_i & \longmapsto & \Gamma \vdash \pi_i(\mu_X(M))\colon A_i \\ \Gamma \vdash MN\colon B & \longmapsto & \Gamma \vdash \mu_X(M)\mu_X(N)\colon B \\ \Gamma \vdash \lambda x.M\colon A^B & \longmapsto & \Gamma \vdash \lambda x.\mu_X(M)\colon A^B \\ \Gamma \vdash t(\!|M_1,\dots,M_n|\!)\colon A, t \in \mathcal{L}_1(X)(\Delta, A) & \longmapsto & \Gamma \vdash t[\mu_X(M_1)/x_1,\dots,\mu_X(M_n)/x_n]\colon A \end{cases}$$

Notons que μ_X est bien définie puisqu'on peut obtenir une preuve pour chaque image à partir de la preuve de l'antécédent en appliquant μ_X récursivement. Le seul cas non direct est l'association de $\Gamma \vdash t(\!|M_1,\dots,M_n|\!)\colon A, t \in \mathcal{L}_1(X)(\Delta, A)$ à $\Gamma \vdash t[\mu_X(M_1)/x_1,\dots,\mu_X(M_n)/x_n]\colon A$ car il faut utiliser le lemme de la substitution : $\dfrac{\dots \quad \Gamma \vdash N_i\colon \Delta_i \quad \dots \quad \Delta \vdash t\colon A}{\Gamma \vdash t[N_1/x_1,\dots,N_n/x_n]\colon A}$ avec $\forall i, N_i = \mu_X(M_i)$

On doit ensuite vérifier que μ et η sont bien naturelles :

— La naturalité de η est assez immédiate : pour $c \in X_1$, pour $f\colon X \to Y$ on a $\eta_Y(f(c)) = f(c)(\!|x_1,\dots,x_n|\!) = f(c)(\!|\mathcal{L}_1(f)(x_1),\dots,\mathcal{L}_1(f)(x_n)|\!) = \mathcal{L}_1(f)(c(\!|x_1,\dots,x_n|\!)) = \mathcal{L}_1(f)(\eta_X(c))$

— Celle de μ est plus longue à montrer car elle se fait par récurrence structurelle sur les éléments P de $\mathcal{L}_1^2(X)$ (en utilisant les définitions inductives de μ et $\mathcal{L}_1(f)$). Le cas le moins évident est celui où $P = t(\!|M_1,\dots,M_n|\!)$, avec $t \in \mathcal{L}_1(X)$, car il nécessite d'avoir montré le lemme 2.

Enfin, on peut montrer que η et μ satisfont bien les propriétés attendues (cf prop. 8) :

1. Pour $t \in \mathcal{L}_1(X)(\Delta, A)$ on a $\mu_{\mathcal{L}_1(X)}(\eta_{\mathcal{L}_1(X)}(t)) = \mu_{\mathcal{L}_1(X)}(t\llparenthesis x_1, \ldots, x_n \rrparenthesis) = t$.
2. En instanciant *(2)* avec η_X on obtient la définition inductive de $\mathcal{L}_1(\eta_X)$. On peut donc raisonner par induction structurelle pour montrer que $\mu_{\mathcal{L}_1(X)} \circ \mathcal{L}_1(\eta_X) = id_{\mathcal{L}_1(X)}$. On ne présente ici que le cas de la règle s'appliquant aux constructeurs puisque c'est la seule qui diffère entre les deux dérivations. Pour $c\llparenthesis M_1, \ldots, M_n \rrparenthesis \in \mathcal{L}_1(X)(\Delta, A)$ on a :
$$\begin{array}{rcl} \mu_{\mathcal{L}_1(X)}(\mathcal{L}_1(\eta_X)(c\llparenthesis M_1, \ldots, M_n \rrparenthesis) & = & \mu_{\mathcal{L}_1(X)}(c\llparenthesis x_1, \ldots, x_n \rrparenthesis \llparenthesis \mathcal{L}_1(\eta_X)(M_1), \ldots, \mathcal{L}_1(\eta_X)(M_n) \rrparenthesis) \\ & = & c\llparenthesis \mu_{\mathcal{L}_1(X)}(\mathcal{L}_1(\eta_X)(M_1), \ldots, \mu_{\mathcal{L}_1(X)}(\mathcal{L}_1(\eta_X)(M_n)) \rrparenthesis \\ (induction) & = & c\llparenthesis M_1, \ldots, M_n \rrparenthesis. \end{array}$$
3. De la même manière on montre la commutativité du diagramme pour μ par induction sur la définition de $\mathcal{L}_1(\mu_X)$ avec pour seul cas non immédiat celui des constantes.
Soit $P\llparenthesis Q_1, \ldots, Q_n \rrparenthesis \in \mathcal{L}_1(X)^3(\Delta, A)$ on a alors :
$$\begin{array}{rcl} \mu_X(\mathcal{L}_1(\mu_X)(P\llparenthesis Q_1, \ldots, Q_n \rrparenthesis)) & = & \mu_X(\mu_X(P)\llparenthesis \mathcal{L}_1(\mu_X)(Q_1), \ldots, \mathcal{L}_1(\mu_X)(Q_n) \rrparenthesis) \\ & = & \mu_X(P)[\mu_X(\mathcal{L}_1(\mu_X)(Q_1))/x_1, \ldots, \mu_X(\mathcal{L}_1(\mu_X)(Q_n))/x_n] \\ (induction) & = & \mu_X(P)[\mu_X(\mu_{\mathcal{L}_X}(Q_1))/x_1, \ldots, \mu_X(\mu_{\mathcal{L}_X}(Q_n))/x_n] \\ (*) : P_i = \mu_{\mathcal{L}_X}(Q_i) & = & \mu_X(P[\mu_{\mathcal{L}_X}(Q_1)/x_1, \ldots, \mu_{\mathcal{L}_X}(Q_n)/x_n]) \\ & = & \mu_X(\mu_{\mathcal{L}_X}(P\llparenthesis Q_1, \ldots, Q_n \rrparenthesis) \end{array}$$
où $(*)$ est l'égalité $\mu_X(P[P_1, \ldots, P_n]) = \mu_X(P)[\mu_X(P_1), \ldots, \mu_X(P_n)]$ qui se montre comme le lemme 2 par induction P.

Cela conclut la preuve de la proposition 5.

La monade $\mathcal{L}_1$ nous donne un moyen de saturer une 1-signature par ses termes, similairement à ce que faisait $\mathcal{L}_0$ avec les ensembles et les types induits par ces ensembles. C'est pourquoi, similairement à ce que l'on a fait pour spécifier ce que sont les constructeurs d'une signature à partir des types de cette signature, on va maintenant être capable de spécifier ce que sont les règles de réduction d'une signature à partir des termes de cette signature et parvenir ainsi à la notion de 2-signature.

On rappelle la notion de *produit fibré* (ou *pullback*) : Dans une catégorie $\mathbf{C}$, étant donnés deux morphismes $f \colon A \to C$ et $g \colon B \to C$, on appelle pullback de f et g entre A et B, un objet D de $\mathbf{C}$ muni de deux morphismes p et q universels pour la commutation de $\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$, c'est à dire que pour tout (X, x_1, x_2) satisfaisant aussi le diagrammme, il existe un unique $h \colon X \to D$ tel que $x_1 = q \circ h$ et $x_2 = p \circ h$. On note $\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$, pour signifier que D est un pullback.

Maintenant, si pour une 1-signature X, on note $X_{||}$ le pullback de ϕ_1 et ϕ_1 entre X_1 et X_1 dans **Sets** , alors $X_{||}$ dénote l'ensemble des paires de constructeurs de X associés au même séquent.
De plus, à chaque morphisme de 1-signature $f \colon X \to Y$ la propriété universelle du pullback nous permettra d'associer de manière unique le morphisme d'ensembles $f_{||} \colon X_{||} \to Y_{||}$, représenté en pointillé sur le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} X_{||} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & X_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd] & \\ & Y_{||} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & Y_1 \arrow[dd] \\ X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "f_1"'] & & \mathcal{S}_0(X_0) \arrow[dr] & \\ & Y_1 \arrow[rr, "\mathcal{S}_0(f_0)"] & & \mathcal{S}_0(Y_0). \end{tikzcd}$$

Muni de ce nouvel outil on est maintenant pleinement capable d'exprimer ce qu'est une 2-signature :

Définition 20 (2-Signature)**.** Une 2-signature (X, X_2) est la donnée d'une 1-signature (X) et d'un ensemble de réductions (X_2) muni d'une fonction $\varphi_2 \colon X_2 \to \mathcal{L}_1(X)_{||}$.

Proposition 6. *On peut définir* **Sig** *la catégorie des 2-signatures en prenant pour morphismes les paires* $(f, f_2) \colon (X, X_2) \to (Y, Y_2)$ *telles que*

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d] & Y_2 \arrow[d] \\ \mathcal{L}_1(X)_{||} \arrow[r, "\mathcal{L}_1(f)_{||}"'] & \mathcal{L}_1(Y)_{||} \end{tikzcd}$$

commute et pour loi de composition la composition composante par composante.

2.2 Modèle d'une 2-Signature

En fait, pour définir la notion de 2-signature, on n'a pas réellement besoin de savoir que $\mathcal{L}_1$ est une monade. Mais s'en rendre compte est une bonne idée pour mieux comprendre la manière dont on peut créer une adjonction entre **Sig** et **CCCAT**. En effet cela donne une marche suplémentaire pour atteindre **CCCAT** en partant de $\mathbf{Sig}_1$: Comme on l'a vu dans la section précédente, toute monade peut être décrite par une adjonction et en particulier celle allant vers la catégorie des algèbres de la monade. On peut donc réutiliser ce résultat et parler de l'adjonction entre $\mathbf{Sig}_1$ et $\mathcal{L}_1$-**Alg** : $\begin{tikzcd} \mathbf{Sig}_1 \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{L}_1\text{-}\mathbf{Alg} \arrow[l, bend left, "\mathcal{U}"] \end{tikzcd}$. Il ne reste plus ensuite qu'à trouver une adjonction $\begin{tikzcd} \mathcal{L}_1\text{-}\mathbf{Alg} \arrow[r, bend left, "\mathcal{V}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{CCCAT} \arrow[l, bend left, "\mathcal{W}"] \end{tikzcd}$. En effet, si on reprend la caractérisation d'une adjonction par les Hom-Set on voit que la composition de deux adjonctions se passe bien, c'est à dire que dans notre cas on obtiendra une adjonction de $\mathbf{Sig}_1$ vers **CCCAT**.

Partant d'une $\mathcal{L}_1$-algèbre (X, a), on peut construire $\mathcal{V}(X, a)$ une CCC ayant pour objets $\mathcal{L}_0(X)$ et pour morhismes entre A et B l'ensemble $X(A \vdash B)$. X_1 contient bien tout les moprhismes nécessaires pour être une CCC, en interprétant les structures des CCC par les règles d'inférence de $\mathcal{L}_1$ puis en appliquant a.

Pour construire une $\mathcal{L}_1$-algèbre à partir d'une CCC $\mathbf{C}$, on peut commencer par poser $X_0 = Obj(\mathbf{C})$ comme type atomique de la signature. Ensuite on doit définir X_1 et $\varphi_1 \colon X_1 \to \mathcal{S}_0(X_0)$. Les morphismes de $\mathbf{C}$ ne sont définis que sur des types atomiques, cependant il est facile de définir une $\mathcal{L}_0$-algèbre $h_0 \colon \mathcal{L}_0(X_0) \to X_0$ en réinterprétant simplement les constructeurs ($\times$, 1, exp) de $\mathcal{L}_0$ par les structures d'exponentielle et de produit définies sur les objets de la catégorie. Ainsi on peut poser $X_1(A \vdash B) = \mathbf{C}(h_0(\prod A), h_0(B))$, où $\prod(A)$ permet simplement de transformer la liste de types composant l'environnement A en produit de types. De la même manière, on va pouvoir définir la $\mathcal{L}_1$-algèbre $h \colon \mathcal{L}_1(X_1) \to X_1$ inductivement sur les règles d'inférence de $\mathcal{L}_1$ en associant à chaque termes induits son interprétation en terme de morphisme dans une CCCAT. On pose ainsi

$$h_1 \colon \quad \mathcal{L}_1(X)_1 \quad \longrightarrow \quad X_1 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} G \vdash x_i \colon G_i & \longmapsto & \pi_i \\ G \vdash () \colon 1 & \longmapsto & ! \\ G \vdash c(\!|M_1, \ldots, M_n|\!) & \longmapsto & c \circ \langle h_1(M_1), \ldots, h_1(M_n) \rangle \\ G \vdash \lambda x \colon A.M \colon B^A & \longmapsto & \varphi(h_1(G, x \colon A \vdash M \colon B) \\ G \vdash MN \colon B & \longmapsto & ev \circ \langle h_1(M), h_1(N) \rangle \\ G \vdash (M, N) \colon A \times B & \longmapsto & \langle h_1(M), h_1(N) \rangle \\ G \vdash \pi M \colon A & \longmapsto & \pi \circ M \\ G \vdash \pi' M \colon A & \longmapsto & \pi' \circ M \end{array} \right.$$

Enfin on peut s'appercevoir que les deux foncteurs $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ sont adjoints en construisant η de manière appropriée.

C'est par une approche similaire qu'est construite dans l'article [1] l'adjonction de **Sig** vers 2-**CCCAT** : on définit d'abord une monade $\mathcal{L}$ qui à partir d'une 2-signature engendre toutes les réductions possibles entre les termes de la signature ($\mathcal{L}$ sature la signature pour les règles de réductions). $\mathcal{L}$ est donnée via un certain nombre de règles d'inférence quotientées par des règles d'équivalence qui permettent de donner une structure proche de celle de 2-CCC à l'ensemble des réductions engendrées. Comme précédemment, on utilise alors la marche qu'offre les $\mathcal{L}$-algèbres pour construire une adjonction de **Sig** vers 2-**CCCAT**.

L'unité de l'adjonction $\begin{tikzcd} \mathbf{Sig} \arrow[r, bend left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & 2\text{-}\mathbf{CCCAT} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$ ainsi construite permet de définir une notion de modèle de 2-signature : pour une 2-signature donnée, l'existence d'un modèle entre la 2-CCC représentant la signature et n'importe quelle autre 2-CCC est donnée de manière automatique par l'existence d'un morphisme de 2-signature entre la signature de départ et la 2-signature associée à la 2-CCC.

3 2-Signature du λ-calcul pur en appel par valeur

En guise d'exemple, l'article [1] présente une 2-signature pour le λ-calcul pur qui est :

$$\Sigma = \left(\{t\}, \left\{ \begin{array}{lccc} a\colon & [t,t] & \vdash & t \\ l\colon & t^t & \vdash & t \end{array} \right\}, \{\beta\colon a(\!|l(\!|x|\!), y|\!) \longrightarrow x(y)\}\right)$$

Dans cette section on se proposera donc de donner une 2-signature pour le λ-calcul pur en appel par valeur.

Afin de restreindre l'application de la règle de réduction β, on va introduire un nouveau type atomique par rapport à la signature du λ-calcul simple : ce sera le type v qui permettra de distinguer les valeurs des termes (type t).

Tout comme l'ensemble des valeurs s'injecte dans l'ensemble des termes, on va chercher à ce que l'ensemble des termes de type v engendrés par notre signature s'injecte dans celui des termes de type t engendrés par cette même signature. Pour faire ce lien on ajoute un nouveau constructeur, $r\colon v \longrightarrow t$, à la signature initiale du λ-calcul. On peut voir ce constructeur comme une sorte de "return" permettant à une valeur d'être considérée en tant que terme.

Pour finir on modifie le typage de λ et la règle de réduction β afin qu'ils respectent la notion de valeur et les conditions de réduction du λ-calcul par valeur. Au final on pose :

$$\Sigma_V = \left(\{v,t\}, \left\{ \begin{array}{lccc} a\colon & [t,t] & \vdash & t \\ l\colon & t^v & \vdash & v \\ r\colon & v & \vdash & t \end{array} \right\}, \{\beta\colon a(\!|r(\!|l(\!|x|\!)|\!), r(\!|y|\!)|\!) \longrightarrow x(y)\}\right)$$

On va également poser $\mathfrak{L}_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_1(\Sigma_V)([\underbrace{v,\ldots,v}_{n}] \vdash t)$ et $\mathfrak{L}_v = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\mathcal{L}_1(\Sigma_V)}([\underbrace{v,\ldots,v}_{n}] \vdash v)$ pour une notation plus agréable.

3.1 Principe d'induction

Afin de montrer l'équivalence entre le λ-calcul en appel par valeur et le langage engendré par notre signature, il est d'abord nécessaire de donner le principe d'induction relié aux termes de cette signature :

Proposition 7 (Enoncé d'un principe d'induction). *Soit x une variable de type v, soit R un terme de type v et soient M et N des termes de type t, pour P un prédicat sur $\mathfrak{L}_t$ et Q un prédicat sur $\mathfrak{L}_v$, on a :*

$$\begin{array}{rl} \forall x, Q(x) & \Longrightarrow (\forall M, N, P(M) \implies P(N) \implies P(a(\!|M,N|\!))) \\ & \Longrightarrow (\forall M, P(M) \implies Q(l(\!|\lambda x\colon v.M|\!))) \\ & \Longrightarrow (\forall R, Q(R) \implies P(r(\!|R|\!))) \\ & \Longrightarrow \forall M \in \mathfrak{L}_t, R \in \mathfrak{L}_v, P(M) \wedge Q(R). \end{array}$$

Preuve. Ce principe d'induction nécessite plusieurs étapes :

a) Il faut tout d'abord savoir à quoi ressemble les termes engendrés par la signature après β et η réduction. Rappelons cependant que le système de réduction engendrés par les règles de réduction β : $\begin{cases} \Gamma \vdash (\lambda x^A.M)N \colon B \xrightarrow{\beta_\to} \Gamma \vdash M[N/x] \colon B \\ \Gamma \vdash \pi_1(M,N) \colon A \times B \xrightarrow{\beta_1} \Gamma \vdash M \colon A \\ \Gamma \vdash \pi_2(M,N) \colon A \times B \xrightarrow{\beta_2} \Gamma \vdash N \colon B \end{cases}$ et

les règles d'expension η : $\begin{cases} \Gamma \vdash M \colon B^A \xrightarrow{\eta_\to} \Gamma \vdash \lambda x^A.(Mx) \colon B^A \\ \Gamma \vdash M \colon A \times B \xrightarrow{\eta_\times} \Gamma \vdash (\pi_1(M), \pi_2(M)) \colon A \times B \\ \Gamma \vdash M \colon 1 \xrightarrow{\eta_1} \Gamma \vdash () \colon 1 \end{cases}$, n'est pas convergent.

La convergence se retrouve en posant des conditions aux réductions : on ne peut appliquer $\beta_\to$ à un terme M que si M n'est pas une λ-abstraction et qu'il n'est pas appliqué à un autre terme ; on ne peut étendre un terme de type produit que si ce n'est pas une paire et qu'il n'est pas soumis à une projection. Ce que l'on appelle terme sous forme *β-normale, η-longue* correspond alors à un terme ne pouvant plus se réduire dans le système de réduction restreint.

Finalement on a la propriété suivante :

Proposition 8. *Pour une 1-signature X donnée, les termes sous formes β-normale, η-longue de type $\Gamma \vdash A$ engendrés par $\mathcal{L}_1(X)$ sont en bijection avec les termes $\Gamma \vdash M \downarrow A$ engendrés par :*

$$\frac{}{\Gamma \vdash x \uparrow A}\,\Gamma(x) = A \qquad \frac{}{\Gamma \vdash () \downarrow \mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma, x \colon A \vdash M \downarrow B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.M \downarrow B^A} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \downarrow A \qquad \Gamma \vdash N \downarrow B}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle \downarrow A \times B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M \uparrow A}{\Gamma \vdash M \downarrow A} A \in X_0 \qquad \frac{\Gamma \vdash M \uparrow B^A \qquad \Gamma \vdash N \downarrow A}{\Gamma \vdash MN \uparrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash M \uparrow A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M \uparrow A_i}$$

$$\frac{\dots \qquad \Gamma \vdash M_i \downarrow \Delta_i \qquad \dots}{\Gamma \vdash c(\!| M_1, \dots, M_n |\!) \uparrow A}\; c \in X(\Delta \vdash A)$$

Cette proposition dont nous ne détaillerons pas la preuve est inspirée de l'article [5]. L'idée des règles d'inférence ci-dessus est d'empêcher l'utilisation des règles de réduction dans un mauvais cadre, tout en assurant que toute les réductions autorisées sont atteintes. Pour cela, les termes engendrés sont formé en deux étapes : tout d'abord ils sont mis sous forme β-normale (règles $\uparrow$) et ensuite ils sont soumis aux règles de la η-expension restreintes pour conserver la β-normalisation.

Grâce à cette proposition on peut ensuite raisonner de manière plus simple sur les éléments de $\mathfrak{L}_t$ et $\mathfrak{L}_v$.

b) On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3. On ne peut pas obtenir de jugements de la forme $\Gamma \vdash M \uparrow A_1 \times A_2$ ou bien $\Gamma \vdash M \uparrow B^A$ à partir des constructeurs (a, r, l) de Σ_V et d'un environnement $\Gamma = (x_1 : v, \dots, x_n : v)$ uniquement constitué de variables.

Preuve par induction sur la dérivation :

— cas de base : règle $\frac{}{\Gamma \vdash x \uparrow A}\,{\scriptstyle \Gamma(x)=A}$. Pour tout x, $\Gamma(x) = v$ donc l'hypothèse est vérifiée.

— cas récursifs :

· règle $\frac{\dots \qquad \Gamma \vdash M_i \downarrow \Delta_i \qquad \dots}{\Gamma \vdash c(\!| M_1, \dots, M_n |\!) \uparrow A}\,{\scriptstyle c \in \Sigma_V(\Delta \vdash A)}$. Les constructeurs de Σ_V ne permettent pas de créer des termes de type autre t ou v donc l'hypothèse est vérifiée.

· règles $\frac{\Gamma \vdash M \uparrow B^A \qquad \Gamma \vdash N \downarrow A}{\Gamma \vdash MN \uparrow B}$ et $\frac{\Gamma \vdash M \uparrow A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i M \uparrow A_i}$. Par hypothèse d'induction on ne peut pas construire leur prémisses, donc on ne peut pas les appliquer.

· les autres règles engendrent des jugements de type $\downarrow$

$\square$

c) Enfin on peut montrer le principe d'induction par contradiction :
Supposons l'ensemble des hypothèses du principe d'induction vraies et sa conclusion fausse. Alors, soit $A = \{M \in \mathfrak{L}_t \mid \neg P(M)\}$ et $B = \{R \in \mathfrak{L}_v \mid \neg Q(R)\}$, on a $A \cup B \neq \emptyset$.
Soit $M \in A \cup B$ minimal pour la dérivation. On a deux cas possibles :
1. Soit $M \in A$
2. Soit $M \in B$

Traitement des cas :

- Cas 1 : $M \in \mathfrak{L}_t$, sa dérivation est donc de la forme $\dfrac{\dfrac{\pi}{V_n \vdash M \uparrow t}}{V_n \vdash M \downarrow t}$ où $V_n = x_1 : v, \ldots, x_n : v$.

Regardons ce que peut valoir π :
— $\pi = \dfrac{\dfrac{\pi'}{V_n \vdash R \downarrow v}}{V_n \vdash r(\!|R|\!) \uparrow t}$ par hypothèses on a $Q(R)$ et $(\forall R, Q(R) \implies P(r(\!|R|\!)))$ ce qui implique $P(M)$. Cela est impossible.
— $\pi = \dfrac{\dfrac{\pi_1'}{V_n \vdash M_1 \downarrow t} \quad \dfrac{\pi_2'}{V_n \vdash M_2 \downarrow t}}{V_n \vdash a(\!|M_1, M_2|\!) \uparrow t}$ par hypothèses on a $P(M_1)$, $P(M_2)$ et $\forall M, N, P(M) \implies P(N) \implies P(a(\!|M, N|\!))$. Cela nous donne $P(M)$, ce qui est impossible.
— D'après le lemme on ne peut pas engendrer les prémisses des règles $\dfrac{\Gamma \vdash M \uparrow B^A \quad \Gamma \vdash N \downarrow A}{\Gamma \vdash MN \uparrow B}$ et $\dfrac{\Gamma \vdash M \uparrow A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i(M) \uparrow A_i}$ elles ne peuvent donc pas être appliquées, leur cas est donc traité.
— Les autres règles ne peuvent pas s'appliquer non plus puisqu'elles rendent un jugement $\downarrow$ ou bien un jugement $\uparrow v$

- Cas 2 : $M \in \mathfrak{L}_v$ donc la dérivation de M est de la forme $\dfrac{\dfrac{\pi}{V_n \vdash M \uparrow v}}{V_n \vdash M \downarrow v}$. Regardons ce que peut valoir π :
— $\pi = \dfrac{}{V_n \vdash x \uparrow v}$ donc $M = x$, cela est impossible car $\forall x, Q(x)$.
— $\pi = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi'}{V_{n+1} \vdash M' \downarrow t}}{V_n \vdash \lambda x : v.M' \downarrow t^v}}{V_n \vdash l(\!|\lambda x : v.M'|\!) \uparrow v}$ par hypothèses on a $P(M')$ et $(\forall M, P(M) \implies Q(l(\!|\lambda x : v.M|\!)))$ on a donc $Q(M)$, ce qui est impossible.
— D'après le lemme on ne peut pas engendrer les prémisses des règles $\dfrac{\Gamma \vdash M \uparrow B^A \quad \Gamma \vdash N \downarrow A}{\Gamma \vdash MN \uparrow B}$ et $\dfrac{\Gamma \vdash M \uparrow A_1 \times A_2}{\Gamma \vdash \pi_i(M) \uparrow A_i}$ elles ne peuvent donc pas être appliquées, leur cas est donc traité.
— Les autres règles ne peuvent pas s'appliquer non plus puisqu'elles rendent un jugement $\downarrow$ ou bien un jugement $\uparrow t$.

L'ensemble des cas aboutit à une contradiction d'où $\forall M \in \mathfrak{L}_t, R \in \mathfrak{L}_v, P(M)$ et $Q(R)$. D'où par contradiction on a bien le principe d'induction.

3.2 Equivalence

On note $\Lambda(n)$ les termes du lambda calcul par valeur contenant au plus n variables distinctes et $\mathfrak{L}_t(n)$ les éléments de $\mathfrak{L}_t$ pour un n fixé. Similairement on note $\Lambda_v(n)$ la restriction de $\Lambda(n)$ à ses valeurs et $\mathfrak{L}_v(n)$ les éléments de $\mathfrak{L}_v$ pour un n fixé. A partir du principe d'induction on peut alors montrer les propriétés suivantes :

Proposition 9. *1.* $\Lambda(n) \cong \mathfrak{L}_t(n)$

2. $\Lambda_v(n) \cong \mathfrak{L}_v(n)$

3. le diagramme $\begin{array}{ccc} \Lambda(n) \times (\Lambda_v(m))^n & \cong & \mathfrak{L}_t(n) \times (\mathfrak{L}_v(m))^n \\ \downarrow \mathit{subst} & & \downarrow \mathit{subst} \\ \Lambda(m) & \cong & \mathfrak{L}_t(m) \end{array}$ *commute.*

Preuve. On note Γ_n l'environnement $x_1, \dots, x_n$ et V_n l'environnement $x_1 \colon v, \dots, x_n \colon v$. On peut alors définir inductivement ϕ_t et ϕ_v deux isomorphismes :

$$\phi_t \colon \quad \Lambda(n) \longrightarrow \mathfrak{L}_t(n)$$

$$\frac{}{\Gamma_n \vdash x}\, x \in \Gamma_n \quad \longmapsto \quad \dfrac{\dfrac{V_n \vdash \phi_v(x) \downarrow v}{V_n \vdash r(\!|\phi_v(x)|\!) \uparrow t}}{V_n \vdash r(\!|\phi_v(x)|\!) \downarrow t}$$

$$\frac{\Gamma_n, x \vdash M}{\Gamma_n \vdash \lambda x.M} \quad \longmapsto \quad \dfrac{\dfrac{V_n \vdash \phi_v(\lambda x.M) \downarrow v}{V_n \vdash r(\!|\phi_v(\lambda x.M)|\!) \uparrow t}}{V_n \vdash r(\!|\phi_v(\lambda x.M)|\!) \downarrow t}$$

$$\frac{\Gamma_n \vdash M \qquad \Gamma_n \vdash N}{\Gamma_n \vdash MN} \quad \longmapsto \quad \dfrac{\dfrac{V_n \vdash \phi_t(M) \downarrow t \qquad V_n \vdash \phi_t(N) \downarrow t}{V_n \vdash a(\!|\phi_t(M), \phi_t(N)|\!) \uparrow t}}{V_n \vdash a(\!|\phi_t(M), \phi_t(N)|\!) \downarrow t}$$

$$\phi_v \colon \quad \Lambda_v(n) \longrightarrow \mathfrak{L}_v(n)$$

$$\frac{}{\Gamma_n \vdash x}\, x \in \Gamma_n \quad \longmapsto \quad \dfrac{\dfrac{}{V_n \vdash x \uparrow v}\, V_n(x) = v}{V_n \vdash x \downarrow v}$$

$$\frac{\Gamma_n, x \vdash M}{\Gamma_n \vdash \lambda x.M} \quad \longmapsto \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{V_n, x \colon v \vdash \phi_t(M) \downarrow t}{V_n \vdash \lambda x^v.\phi_t(M) \downarrow t^v}}{V_n \vdash l(\!|\lambda x^v.\phi_t(M)|\!) \uparrow v}}{V_n \vdash l(\!|\lambda x^v.\phi_t(M)|\!) \downarrow v}$$

On peut remarquer qu'en fait si $R \in \Lambda_v(n)$ alors $\phi_t(R) = r(\!|\phi_v(R)|\!)$. On a ainsi les isomorphismes réciproques ϕ_t^{-1}, ϕ_v^{-1} :
$\phi_v^{-1}(x) = x$
$\phi_v^{-1}(l(\!|\lambda x.M|\!)) = \lambda x.\phi_t^{-1}(M)$
$\phi_t^{-1}(r(\!|R|\!)) = \phi_v^{-1}(R)$
$\phi_t^{-1}(a(\!|M, N|\!) = \phi_t^{-1}(M)\phi_t^{-1}(N)$

Enfin il reste à montrer que $\forall M \in \Lambda(n), \forall (R_1, \dots, R_n) \in \Lambda_v(m)^n,\ \phi_t(M[R_1, \dots, R_n]) = \phi_t(M)[\phi_v(R_1), \dots, \phi_v(R_n)]$.
Cela se fait sans accroche par induction sur M.

On a donc bien une équivalence entre les termes engendrés par notre 2-signature et les termes engendrés par le λ-calcul en appel par valeur.

Une prochaine étape consisterait à montrer la bissimulation entre les deux langages. Cette partie n'a pas pu être réalisée au cours du stage faute de temps. On peut cependant avoir une intuition pour l'implication : $\forall M, N \in \Lambda(n),\ M \to^* N \implies \exists P,\ V_n \vdash (P \colon \phi_t(M) \to \phi_t(N)) \colon t$. En effet, à chaque règle de réduction du λ-calcul par valeur on peut associer la dérivation d'une preuve de réduction dans $\mathfrak{L}_t$:

- Pour $\dfrac{(\lambda x.M)R}{M[R/x]}$ règle β on a $\phi_t((\lambda x.M)R) = a(\!|r(\!|l(\!|\lambda x.\phi_t(M)|\!)|\!), r(\!|\phi_v(R)|\!)|\!)$ et $\phi_t(M[R/x]) = \phi_t(M)[\phi_v(R)]$ donc on peut prendre $\beta(\phi_t(M), \phi_v(R))$ comme terme de réduction.
- Pour $\dfrac{M_1 M_2}{M_1 M_2'}$ règle R on a $\phi_t(M_1 M_2) = a(\!|\phi_t(M1), \phi_t(M_2)|\!)$ et $\exists P, V_n \vdash P : M_2 \to M_2' \colon t$

donc $a(\!|\phi_t(M1), P|\!)$ convient.

— Idem pour la règle $L\left(\dfrac{M_1M_2}{M_1'M_2}\right)$ mais dans l'autre sens (on obtient $a(\!|P, \phi_t(M2)|\!)$).

— Enfin, pour $\dfrac{\lambda x.M}{\lambda x.M'}$ règle ξ on a $\phi_t(\lambda x.M) = r(\!|l(\!|\lambda x\colon v.M|\!)|\!)$ et $\exists P, V_n \vdash P : M \to M' \colon t$ donc $r(\!|l(\!|\lambda x\colon v.P|\!)|\!)$ convient.

Conclusion

Au cours de ce stage on a découvert les bases de la théorie des catégories et on s'est intéressé plus particulièrement à comprendre une manière d'utiliser cette théorie pour donner un cadre à la sémantique des langages avec lieurs, en se plaçant dans les 2-CCC.

Afin de mieux comprendre ce mécanisme théorique mais également afin de confronter l'expressivité du modèle construit à la réalité des langages existents, on a tenté de montrer l'équivalence entre le λ-calcul pur en appel par valeur et le langage engendré par la 2-signature Σ_V. Cette équivalence a pu être montrée au niveau des termes mais reste à finir pour ce qui concerne les réductions.

Par ailleurs on aurait également aimé faire une comparaison plus approfondie de ce qu'apporte l'approche que l'on a étudiée aux sémantiques des langages de programmation déjà existentes. Par exemple, outre le fait qu'elle permet de définir la notion de modèle, l'approche par les 2-CCC permet également de détailler les étapes des réductions (modulo équivalence par permutation) ce qui raffine les modèles précedents notamment celui de J.Lambek [6] dans lequel la réduction d'un terme vers un autre correspond à une simple relation binaire entre ces termes.

Pour finir je voudrais simplement remercier Tom Hirschowitz pour sa patience et sa présence tout au long de ce stage.

Références

[1] T. Hirschowitz, *Cartesian closed 2-categories and permutation equivalence in higher-order rewriting*, (2013)

[2] R. Crole, *Categories for Types*, Cambridge Mathematical Textbooks (1993) Chap.1-2,3-4

[3] B. Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (2005) Vol.141 Chap.2

[4] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford Logic Guides 52 (2010)

[5] C. Jay & N. Ghani, *The Virtues of Eta-expansion*, (1993)

[6] J. Lambek, *From λ-calculus to Cartesian closed categories*, Academic Press (1980)