Concurrent programs as proofs: Compacting message passing logic

Aurore Alcolei

4 Septembre 2014

Contexte

Compactification : Logique des Canaux
    Fragment Multiplicatif
    Fragment Additif

Compactification 2 : Le passage des messages

Une sémantique pour la programmation concurrente

Cockett et Pastro : *Multiplicative-Additive linear logic, The logic of message passing*

Trois systèmes équivalents :

$$\boxed{\text{Un langage de programmation}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\text{Un système de preuve}}$$

$$\nwarrow\!\!\searrow \qquad\qquad \nearrow\!\!\swarrow$$

$$\boxed{\text{Une sémantique catégorique}}$$

ex :

$$\text{On } \alpha = \beta \text{ plug } P \text{ to } Q \;\leftrightarrow\; \frac{P :: \Gamma \Vdash \Delta, \alpha : A \qquad Q :: \beta : A, \Gamma' \Vdash \Delta'}{P_{\alpha};_{\beta} Q :: \Gamma, \Gamma' \Vdash \Delta, \Delta'}\,\text{cut}$$

$$\leftrightarrow P : \Gamma \longrightarrow \Delta, A Q : A, \Gamma' \longrightarrow \Delta' = PQ : \Gamma, \Gamma' \longrightarrow \Delta, \Delta'$$

Aperçu

Système de preuve

- Logique des Canaux : fragment multiplicatif $(\otimes, \oplus)$ et additif $(\times, +)$ de la logique linéaire.
- Logique des Messages et règles pour le Passage des Messages (lecture, écriture : $\circ$, $\bullet$)

$$\frac{\Phi \vdash f : A \qquad P :: \Phi' \bigcup \alpha : X, \Gamma \Vdash \Delta}{\alpha_{(\,f\,\rfloor}.P :: \Phi, \Phi' \bigcup A \bullet X, \Gamma \Vdash \Delta}$$

$$\frac{P :: \Phi, x : A \bigcup \alpha : X, \Gamma \Vdash \Delta}{\alpha_{\sqcup} x^{\sim}.P :: \Phi \bigcup A \circ X, \Gamma \Vdash \Delta}$$

Sémantique catégorique

- Catégorie linéairement distribuée (linearly distributive category),$(CProc, \otimes, \oplus)$, munie de produits et coproduits $(\times, +)$.
- Catégorie monoidale avec coproduits, Msg.
- Actégorie linéaire (linear actegory) : $PMsg = Msg, CProc, \bullet, \circ$

Pourquoi compacter ?

De bonnes propriétés :

- → Des systèmes équivalents.
- → Tout programme termine sans deadlock.

Des contraintes :

- → Pas de notion de non déterminisme.
- → Un typage fort qui réduit l'expressivité : une seule connexion autorisée entre deux processus.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{cut}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B, \Delta'} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Idée : Compacter la logique ($\otimes = \oplus$)

Contexte

Compactification : Logique des Canaux

Fragment Multiplicatif

Fragment Additif

Compactification 2 : Le passage des messages

Point de vue catégorique(1)

Def 1. : Catégorie linéairement distribuée avec produits et coproduits :

- Deux produits tensoriels $(\otimes, \oplus)$ tels que :

$$A \otimes B \oplus C \longrightarrow A \otimes B \oplus C$$

- Produits et coproduits $(\times, +)$ tels que :

$$A \otimes B + C \cong A \otimes B + A \otimes C$$

$$A \times B \oplus C \cong A \oplus C \times B \oplus C$$

- Plus d'autres axiomes de cohérence.

Prop. 1 : La version compacte d'une catégorie linéairement distribuée $(\otimes = \oplus)$ est une catégorie monoidale telle que le produit tensoriel préserve produits et coproduits.

Point de vue catégorique (2)

Thm 1. [Houston] : Si une catégorie monoidale, $(\mathcal{M}, \otimes)$, est à produits et coproduits finis tels que $A \otimes \_$ préserve les produits et $\_ \otimes A$ préserve les coproduits, alors $\mathcal{M}$ est munie de biproduits et $A + B \cong A \times B$.

Prop 2. : Une catégorie, $\mathcal{C}$, munie de biproduits est additivement enrichie (ie pour tout A, B, $\mathcal{C}A, B$ est un monoide).

$\Longrightarrow$ La version compacte d'une catégorie linéairement distribuée avec produits et coproduits est une catégorie monoidale additivement enrichie avec biproduits.

$\longrightarrow$ Compactification du fragment additif par : $+ = \times$.

$\longrightarrow$ introduction de non-déterminisme explicite :

$$P :: \Gamma \Vdash \Delta \text{ “ou” } Q :: \Gamma \Vdash \Delta \;\sim\; P + Q :: \Gamma \Vdash \Delta$$

Fragment Multiplicatif : Règles d'inférence originales

$$\frac{}{A \vdash A}\ \text{(identity)},\ A \text{ atomic} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{(cut)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B, \Delta'}\ (\text{split}_R) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{split}_L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A \otimes B, \Delta_2}\ (\text{fork}_R) \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \oplus B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{fork}_L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \bot, \Delta'}\ (\text{close}_R) \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \top, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{close}_L) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\text{end}_R) \qquad \frac{}{\bot \vdash}\ (\text{end}_L)$$

Règles d'inférence : système compacté

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\text{identity}),\ A \text{ atomic} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad A, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{cut})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \otimes B, \Delta'}\ (\text{split}_R) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{split}_L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A \otimes B, \Delta_2}\ (\text{fork}_R) \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{fork}_L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \top, \Delta'}\ (\text{close}_R) \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \top, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{close}_L) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\text{end}_R) \qquad \frac{}{\top \vdash}\ (\text{end}_L)$$

Conséquences (1)

Introduction de nouvelles règles :

1. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \top}(c_R) \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\top, \Gamma' \vdash \Delta'}(c_L)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta\Delta'} \implies \dfrac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{parallel}$$

2. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, A, B}}{\Gamma \vdash \Delta, A \otimes B}\, s_R \qquad \dfrac{\dfrac{\pi'}{A, B, \Gamma' \vdash \Delta'}}{A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta'}\, s_L}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, A, B} \qquad \dfrac{\pi'}{A, B, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{multi-cut}$$

Conséquences (2)

3.
$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \top}\,\mathsf{u}_L \qquad \dfrac{}{\top \vdash}\,\mathsf{u}_R}{\vdash}\,\mathsf{cut} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{}{\vdash}\,\text{empty}$$

4.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta, A} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta, A \otimes B}\,\mathsf{f}_R \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_1'}{A \vdash \Delta_1'} \qquad \dfrac{\pi_2'}{B, \Gamma' \vdash \Delta_2'}}{A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta_1', \Delta_2'}\,\mathsf{f}_L}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta_1', \Delta_2'}\,\mathsf{cut}$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma_1 \vdash \Delta, A} \qquad \dfrac{\pi_1'}{A \vdash \Delta_1'}}{\Gamma_1 \vdash \Delta, \Delta_1'}\,\mathsf{cut} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma_2 \vdash B} \qquad \dfrac{\pi_2'}{B, \Gamma' \vdash \Delta_2'}}{\Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta_2'}\,\mathsf{cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta_1', \Delta_2'}\,\mathsf{para}$$

Conséquences (3)

5. $$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{id} \qquad \dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}\,\mathrm{parallel} \qquad \Longrightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta}}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}\,\mathrm{id}$$

Des redondances :

- $$\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{id} \quad := \quad \dfrac{\vdash \quad \mathrm{emp}}{A \vdash A}\,\mathrm{id}$$
- $$\dfrac{}{\top \vdash}\,\mathrm{ui}_L \quad := \quad \dfrac{\vdash \quad \mathrm{emp}}{\top \vdash}\,\mathrm{u}_L$$
- $$\dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,(\mathrm{f}_L) \quad := \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,\mathrm{para}}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\,\mathrm{s}_L$$

Règles d'inférence : système compact

$$\frac{}{\vdash}\ (\text{empty}) \qquad \frac{}{A \vdash A}\ (\text{identity}),\ A \text{ atomic} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}\ (\text{id})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Lambda \qquad \Lambda, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{multi-cut}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{parallel})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \otimes B, \Delta'}\ (\text{split}_R) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{split}_L)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2, \vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, A \otimes B, \Delta_2}\ (\text{fork}_R) \qquad \frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, A \otimes B, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ (\text{fork}_L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \top, \Delta'}\ (\text{close}_R) \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \top, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{close}_L) \qquad \frac{}{\vdash \top}\ (\text{end}_R) \qquad \frac{}{\top \vdash}\ (\text{end}_L)$$

Règles d'inférence : système compact

$$\frac{}{\vdash}\ (\text{empty}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}\ (\text{id})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{parallel}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Lambda \qquad \Lambda, \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{multi-cut})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A \otimes B, \Delta'}\ (\text{split}_R) \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A \otimes B, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{split}_L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \top, \Delta'}\ (\text{close}_R) \qquad \frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \top, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\text{close}_L)$$

Annotations

$$\frac{}{\varnothing :: \vdash}\ (\text{empty}) \qquad \frac{P :: \Gamma \vdash \Delta}{\alpha =_A \beta . P :: A, \Gamma \vdash A, \Delta}\ (\text{id})$$

$$\frac{P :: \Gamma \vdash \Delta \qquad Q :: \Gamma' \vdash \Delta'}{P \| Q :: \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{parallel})$$

$$\frac{P :: \Gamma \vdash \Delta, \alpha_{iI} : \Lambda \qquad \beta_{iI} : \Lambda, \Gamma' \vdash \Delta'}{P {}_{\bigcup}{}^{\alpha_i, \beta_{iI}}{}_{\bigcup} Q :: \Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ (\text{multi-cut})$$

$$\frac{P :: \Gamma \vdash \Delta, \alpha_1 : A, \alpha_2 B, \Delta'}{\alpha_{\coprod}{}^{\alpha_1, \alpha_2}{}^{\sim} . P :: \Gamma \vdash \Delta, \alpha : A \otimes B, \Delta'}\ (\text{split}_R) \qquad \text{idem } (\text{split}_L$$

$$\frac{P :: \Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\alpha_{\coprod}{}^{\sim} . P :: \Gamma \vdash \Delta, \alpha : \top, \Delta'}\ (\text{close}_R) \qquad \text{idem } (\text{close}_L$$

Réductions

Règles d'interaction :

- $\gamma =_A \alpha.P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup Q \Longrightarrow P \bigcup^{M} \bigcup Q_{(}{}^{\gamma}{}_{\Uparrow}{}^{\beta}{}_{\rfloor}$
- $\alpha_{\coprod}{}^{\alpha_1,\alpha_2}{}^{\sim}.P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup \beta_{\coprod}{}^{\beta_1,\beta_2}{}^{\sim}.Q \Longrightarrow P \bigcup^{\alpha_1,\beta_1 \alpha_2,\beta_2 M} \bigcup Q$
- $\alpha_{\coprod}{}^{\sim}.P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup \beta_{\coprod}{}^{\sim}.Q \Longrightarrow P \bigcup^{M} \bigcup Q$

Règles de non-interaction ($\gamma \notin M$) :

- $\varnothing \parallel P \Longrightarrow P$
- $\gamma_{\coprod}{}^{\gamma_1,\gamma_2}{}^{\sim}.P \bigcup^{M} \bigcup Q \Longrightarrow \gamma_{\coprod}{}^{\gamma_1,\gamma_2}{}^{\sim}.P \bigcup^{M} \bigcup Q$ $+$ règles duales
- $\gamma_{\coprod}{}^{\sim}.P \bigcup^{M} \bigcup Q \Longrightarrow \gamma_{\coprod}{}^{\sim}.P \bigcup^{M} \bigcup Q$

Equivalences par permutation (α, β, γ distincts) :

Fragment Additif : Règles d'inférence originales

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, 1}\ (\text{terminal}) \qquad \frac{}{0, \Gamma \vdash \Delta}\ (\text{initial})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_k}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ (\text{injection}) \qquad \frac{A_k, \Gamma \vdash \Delta}{\Pi_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ (\text{projection})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_{i\,I}}{\Gamma \vdash \Delta, \Pi_I A_i}\ (\text{tuple}) \qquad \frac{A_i, \Gamma \vdash \Delta_I}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ (\text{cotuple})$$

Règles d'inférence : système compacté

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, 0}\ \text{(terminal)} \qquad \frac{}{0, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(initial)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_k}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(injection)} \qquad \frac{A_k, \Gamma \vdash \Delta}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(projection)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_{i\,I}}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(tuple)} \qquad \frac{A_i, \Gamma \vdash \Delta_I}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(cotuple)}$$

Conséquences (1)

Introduction de nouvelles règles :

1. $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_i}{\Gamma \vdash \Delta_i, A_i}}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma A_i}\, I\ \text{tup} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi'_i}{A_i, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Sigma A_i, \Gamma' \vdash \Delta'}\, I\ \text{cotup}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut} \quad \Longrightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_i}{\Gamma \vdash \Delta, A_i} \qquad \dfrac{\pi'_i}{A_i, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\ \text{cut}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\, I\ \text{sum}$$

2. $$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, 0}\ \text{term} \qquad \dfrac{}{0, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{init}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{cut} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{zero}$$

Conséquences (2)

3.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, A_k}}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma A_i}\,\text{inj} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi'}{A_j, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Sigma A_i, \Gamma' \vdash \Delta'}\,\text{proj}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{cut}$$

si $k = j \swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$ si $k \neq j$

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash \Delta, A_k} \qquad \dfrac{\pi'}{A_j, \Gamma' \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{cut} \qquad\qquad \dfrac{}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,\text{zero}$$

Des Redondances :

- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A_{i\,I}}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\,\text{tup} \;:=\; \dfrac{\left(\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A_i}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\,\text{inj}\right)_I}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\,\text{sum}$ (idem coptuple et projection)

Règles d'inférence : système compact

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{zero} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_I}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{sum}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta, 0}\ \text{(terminal)} \qquad \frac{}{0, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(initial)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_k}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(injection)} \qquad \frac{A_k, \Gamma \vdash \Delta}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(projection)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_{i\,I}}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(tuple)} \qquad \frac{A_i, \Gamma \vdash \Delta_I}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(cotuple)}$$

Règles d'inférence : système compact

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{zero} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_I}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{sum}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A_k}{\Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(injection)} \qquad \frac{A_k, \Gamma \vdash \Delta}{\Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(projection)}$$

Annotations

$$\dfrac{}{0_{\Gamma \vdash \Delta} :: \Gamma \vdash \Delta}\ \text{zero} \qquad \dfrac{P_i :: \Gamma \vdash \Delta\ {}_I}{\Sigma_I P_i :: \Gamma \vdash \Delta}\ \text{sum}$$

$$\dfrac{P :: \Gamma \vdash \Delta, \alpha : A_k}{\alpha k.P :: \Gamma \vdash \Delta, \Sigma_I A_i}\ \text{(injection)} \qquad \dfrac{P :: \alpha : A_k, \Gamma \vdash \Delta}{\alpha k.P :: \Sigma_I A_i, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{(projection)}$$

Réductions

Règles d'interaction :

- $\alpha k.P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup^{\beta} k.Q \Longrightarrow P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup^{Q}$
- $\alpha k.P \bigcup^{\alpha,\beta M} \bigcup^{\beta} j.Q \Longrightarrow 0_{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}$

Règle de non-interaction ($\gamma \notin M$) :

- $0_{\Gamma \vdash \Delta} \bigcup^{M} \bigcup^{P} \Longrightarrow 0_{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'}$
- $\Sigma P_i \bigcup^{M} \bigcup^{Q} \Longrightarrow \Sigma P_i \bigcup^{M} \bigcup^{Q}$
- $\gamma k.P \bigcup^{M} \bigcup^{Q} \Longrightarrow \gamma k.P_i \bigcup^{M} \bigcup^{Q}$

$+$ règles duales

Equivalence par permutation :

- $\alpha k.\beta \coprod^{\sim}.P \longmapsto \beta \coprod^{\sim}.\alpha k.P$
- $\alpha \coprod^{\sim}.\Sigma P_i \longmapsto \sigma\alpha \coprod^{\sim} P_i$
- etc ...

Contexte

Compactification : Logique des Canaux
Fragment Multiplicatif
Fragment Additif

Compactification 2 : Le passage des messages

Point de vue Catégorique

Def 2. : Actégorie linéaire :

- Une catégorie linéarement distribuée $\mathcal{H}$
- Une catégorie monoidale, $\mathcal{M}$, agissant sur $\mathcal{H}$ via deux actions adjointes :

$$\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \qquad\qquad \bullet : \mathcal{M}^{op} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

- Des lois associatives et distributive : $A \circ B \bullet X \longrightarrow B \bullet A \circ X$, ...
- Des axiomes de cohérences

Conséquences :

- Pas de changement pour la catégorie monoidale.
- Pas d'impacte directe sur les actions, mais disparition de lois distributives au profit de loi associatives :

$$A \circ B \bullet X \cong B \bullet A \circ X$$

Point de vue Logique (1)

$\longrightarrow$ Conservation des mêmes règles pour la logique et le passage des messages.

$\Longrightarrow$ Une logique qui autorise la construction de termes avec deadlocks !

$$\frac{\Phi \vdash f : A \qquad \Psi \bigcup \Gamma \Vdash \alpha : X, \Delta}{\alpha \underset{(\ \rfloor}{f} .P :: \Phi, \Psi \bigcup \Gamma \Vdash A \bullet X, \Delta}\ (\bullet_r) \qquad \frac{x : A, \Phi \bigcup \Gamma, \alpha : X \Vdash \Delta}{\alpha_{\coprod} x^{\sim}.P :: \Phi \bigcup \Gamma, A \bullet X \Vdash \Delta}\ (\bullet_l)$$

$$\frac{P :: x : A, \Phi \bigcup \Gamma \Vdash \alpha : X, \Delta}{\alpha_{\coprod} x^{\sim}.P :: \Phi \bigcup \Gamma \Vdash A \circ X, \Delta}\ (\circ_r)$$

$$\frac{\Phi \vdash f : A \qquad P :: \Psi \bigcup \Gamma, \alpha X \Vdash \Delta}{\alpha \underset{(\ \rfloor}{f} .P :: \Phi, \Psi \bigcup \Gamma, A \circ X \Vdash \Delta}\ (\circ_l)$$

Point de vue Logique (2)

Solution étudiée :

Des règles de réductions strictes qui empêchent les termes avec deadlocks d'être évalués.

- Règles d'interaction :

  - $\alpha_{\coprod} x^{\sim}.P_{\bigcup}{}^{\alpha,\beta M}{}_{\bigcup}{}^{\beta}{}_{(} f_{\rfloor}.Q \Longrightarrow x \mapsto Pf_{\bigcup}{}^{\alpha,\beta M}{}_{\bigcup} Q$
  - $\alpha_{(} f_{\rfloor}.P_{\bigcup}{}^{\alpha,\beta M}{}_{\bigcup}{}^{\beta}{}_{\coprod} x^{\sim}.Q \Longrightarrow P_{\bigcup}{}^{\alpha,\beta M}{}_{\bigcup} x \mapsto Qf$

- Equivalence par permutations restreintes :

  - $\alpha_{\coprod} x^{\sim}.\beta_{(} f_{\rfloor}.P \longmapsto \beta_{(} f_{\rfloor}.\alpha_{\coprod} x^{\sim}.P$, non autorisée si $x \in Domf$
  - etc.

Ex : $P_{\bigcup}{}^{\alpha,\alpha' \beta,\beta'}{}_{\bigcup} Q$ ne peut pas réduire

Pistes de travail

1. Introduction de terme circulaires dans la logique des messages pour autoriser les processus à avoir des contextes dépendants.

2. Développement de protocoles pour la logique compactée (communications infinies).
3. Expressivité du langage, comparaison avec d'autres sémantiques (pi-calcul)

Merci de votre attention