Sémantique 2-catégorique des langages de programmation

Stage de L3 encadré par Tom Hirschowitz

ENS de Lyon
Departement d'Informatique

24 Juillet 2013

Aurore Alcolei

ENS DE LYON

Contexte

Constructions

- Signatures
- Vers 2-CCAT

Représentation du λ-calcul par valeur

Un peu de contexte

- Langage de programmation = HORS
  - ex : le λ-calcul pur
    - grammaire : $M, N \in \Lambda(\Gamma) := x \in \Gamma \mid \lambda x.M \mid MN$
    - règles de réduction :

$$(\beta) : (\lambda x.M)N \to M[N/x] \qquad (\xi) : M \to M' \implies \lambda x.M \to \lambda x.M'$$

$$(R) : N \to N' \implies MN' \to MN' \qquad (L) : M \to M' \implies MN \to M'N$$

  - autres ex : λ-calcul en cbv, cbn, lazy, optimal, λ-calcul avec let rec / refs / call/cc, π-calcul, etc.

$\longrightarrow$ Un fort point commun : les abstractions (langage avec lieurs)

$\longrightarrow$ Toujours les mêmes preuves à refaire/ notion à redéfinir

Contexte (suite)

But :

Trouver un cadre dans lequel spécifier la notion de langage avec lieurs et leur sémantique
$\Longrightarrow$ automatisation des constructions relatives

Ce qui existe déjà :

- Les HORS de T.Nipkow $\rightarrow$ limites : pas de notion de modèles ; ne rend pas compte des étapes de réduction (relation binaire)
- Approche catégorique dans les CCC (J.Lambek) $\rightarrow$ limites : pas de notion de réductions, modèles uniquement pour les théories équationnelles

Idées

Idée 1 Utiliser un cadre catégorique pour spécifier la sémantique des langages.

Idée 2 Utiliser un λ-calcul simplement typé, paramétré, comme support de construction.

D'où on part : Spécification des syntaxes avec lieurs

- Syntaxe avec lieurs $\approx$ λ-calcul simplement typé paramétré par une 1-signature
- Catégorie Sig_1 de 1-signatures
- Monade $\mathcal{L}_1$ sur Sig_1 : termes engendrés

Ce qu'on propose : Spécification des systèmes de récriture avec lieurs

- raffiner les 1-signatures $\rightsquigarrow$ 2-signatures
- Réductions $\approx$ 2λ-calcul simplement typé paramétré par Σ
- Catégories, monades, etc.

Contexte

Constructions

Signatures

Vers 2-CCAT

Représentation du λ-calcul par valeur

Par l'exemple : 2-signature du λ-calcul pur

$$\Sigma_\Lambda = \left(\{t\}, \left\{ \begin{array}{lccc} l\colon & [t^t] & \longrightarrow & t \\ a\colon & [t,t] & \longrightarrow & t \end{array} \right\}, \left\{ \beta\colon a(\!|l(\!|x|\!), y|\!) \to x(y) \right\} \right)$$

Trois ensembles :

1. Types de base : $X_0 = \{t\}$.
2. Opérations l et a, munies de leur typage.
3. Règle β. Termes de même type, inclusion des paramètres.
   Intuition 2-catégorique :

$$\begin{tikzcd}
 & t \times t \arrow[dr, "a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\
t^t \times t \arrow[ur, "l\times t"] \arrow[rr, bend right, "ev"'] & & t.
\end{tikzcd}$$

Un peu plus formellement : étape 1

Les types d'une signature

obtenus par application de

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_0\colon & Sets & \longrightarrow & Sets \\ & X & \longmapsto & \{A, B := x \in X_0 \mid A \times B \mid \mathbf{1} \mid B^A\} \end{array}$$

sur X_0

→ 1-signature :

- séquent := élément de $\mathcal{S}_0(X) = \mathcal{L}_0(X)^* \times \mathcal{L}_0(X)$
- 1-signature := (X_0, X_1) munie de $\begin{array}{rccl} \varphi_1\colon & X_1 & \longrightarrow & \mathcal{S}_0(X) \\ & c & \longmapsto & (dom(c), cod(c)) \end{array}$

Un peu plus formellement : étape 2

Les termes d'une signature

engendrés par :

+ les règles du λ-calcul simplement typé

+ paires et projections

$$+ \frac{\dots \qquad \Gamma \vdash M_i \colon \Delta_i \qquad \dots}{\Gamma \vdash c(\!|M_1, \dots, M_n|\!) \colon A}\ c \in X_1(\Delta, A)$$

modulo β η réduction ! (*)

$\rightarrow$ $\mathcal{L}_1\colon \; Sig_1 \longrightarrow Sig_1$ telle que $\begin{cases} \mathcal{L}_1(X)_0 = X_0 \text{ et} \\ \mathcal{L}_1(X)_1 = \text{ termes de la signature} \end{cases}$

$\ast$ Structure proche des CCC

Un peu plus formellement : étape 3

Les opérations parallèles d'une 1-Signature (Pullback)

$$\begin{tikzcd} X_{||} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X_1 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & \mathcal{S}_0(X_0). \end{tikzcd}$$

Ex : $(a(\!|l(\!|x|\!), y|\!), x[y]) \in \mathcal{L}_1(Sigma)_{||}$

$\rightarrow$ 2-signature :

Une 1-signature X + un X_2 muni d'un

$$\begin{array}{rccl} \varphi_2 \colon & X_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}_1(X)_{||} \\ & r & \longmapsto & \text{(un terme, sa réduction par r)} \end{array}$$

Retour sur l'exemple

- Plus de termes dans $\mathcal{L}_1(\Sigma)$ que dans Λ

$\Longrightarrow$ Repose sur la correspondance :

$$\begin{array}{c}\text{Termes du } \lambda\text{-calcul pur avec } n \text{ variables libres} \\ \cong \\ \text{Termes sur } \Sigma \text{ tels que } x_1 : t, \ldots, x_n : t \vdash M : t\end{array}$$

Exemples :

- $[\![\lambda x.M]\!] = l(\!|\lambda x.[\![M]\!]|\!)$
- $[\![MN]\!] = a(\!|[\![M]\!], [\![N]\!]|\!)$
- $[\![x]\!] = x$

Réductions

Une Démarche Similaire :

- On définit une monade $\mathcal{L}$ sur Sig_2
- Réductions := Jugements générés par une sorte de 2λ-calcul :
  - Règles de contexte :

$$\frac{\Gamma, x{:}\, A \vdash P : M \to N{:}\, B}{\Gamma \vdash (\lambda x{:}\, A.P) : \lambda x{:}\, A.M \to \lambda x{:}\, A.N{:}\, B^A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P_1 : M_1 \to N_1{:}\, G_1 \qquad \dots \qquad \Gamma \vdash P_n : M_n \to N_n{:}\, G_n}{\Gamma \vdash c(\!|P_1, \dots, P_n|\!) : c(\!|M_1, \dots, M_n|\!) \to c(\!|N_1, \dots, N_n|\!){:}\, A}\ (c \in X_1(G \vdash A))$$

  - Règle spécifique :

$$\frac{\dots \qquad \Gamma \vdash P_i{:}\, M_i \to N_i{:}\, G_i \qquad \dots}{\Gamma \vdash r\langle\!\langle P_1, \dots, P_n \rangle\!\rangle{:}\, M[M_1, \dots, M_n] \to N[N_1, \dots, N_n]{:}\, A}\ (r \in X(G \vdash M, N{:}A))$$

- Modulo certaines équation ...

Équations entre réductions par l'exemple

- Règles d'équivalence $\rightsquigarrow$ β, η équivalence, équivalence par permutation, ...

- Exemple :

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & (\lambda x.M)N \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (\lambda x.M')N' \arrow[dr] & & M[x \mapsto N] \arrow[dl, "\star"'] \\ & M'[x \mapsto N'] & \end{tikzcd}$$

Réduction gauche : $a(\!|I(\!|\lambda x^t.P|\!), Q|\!); \beta\langle\!\langle \lambda x^t.M', N'\rangle\!\rangle$

$\equiv \beta\langle\!\langle \lambda x^t.P, Q\rangle\!\rangle$

$\equiv \beta\langle\!\langle \lambda x^t.M, N\rangle\!\rangle; (\lambda x^t.P)Q$

$\equiv \beta\langle\!\langle \lambda x^t.M, N\rangle\!\rangle; P[x \mapsto Q]$: Réduction droite.

Lien 2-Signature - 2-Catégorie Cartesienne Fermée

$\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}$ sont des monades.

$$\begin{tikzcd} Sig_2 \arrow[r, bend left, "\mathcal{K}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{L}-\mathit{Alg} \arrow[l, bend left, "\mathcal{U}"] \arrow[r, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathit{2\text{-}CCCat} \arrow[l, bend left, "\mathcal{V}"] \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ modèle de Σ : morphisme $\mathcal{FK}(\Sigma) \to C$ dans $2 - CCCAT$

2-Signature du λ-calcul en CBV

$$\Sigma_\Lambda = \left(\{t\}, \left\{ \begin{array}{lccc} l\colon & [t^t] & \longrightarrow & t \\ a\colon & [t,t] & \longrightarrow & t \end{array} \right\}, \ \{\ \beta\colon a(\!|l(\!|x|\!), y|\!) \to x(y)\ \} \right)$$

$$\Downarrow \text{ restreindre } \beta$$

$$\Sigma_{\Lambda_{CBV}} = \left(\{t,v\}, \left\{ \begin{array}{lccc} l\colon & [t^v] & \longrightarrow & v \\ a\colon & [t,t] & \longrightarrow & t \\ r\colon & [v] & \longrightarrow & t \end{array} \right\}, \{\ \beta\colon a(\!|r(\!|l(\!|x|\!)|\!), r(\!|y|\!)|\!) \to x(y)\ \} \right)$$

valeur $\rightsquigarrow$ type v

$\Lambda(n)_v \hookrightarrow \Lambda(n) \rightsquigarrow$ constructeur r

$$\begin{tikzcd} & v \times v \arrow[r, "r\times r"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & t \times t \arrow[dr, "a"] & \\ t^v \times v \arrow[ur, "l\times v"] \arrow[rrr, bend right, "ev"'] & & & t \end{tikzcd}$$

Représentations équivalentes ?

Ce qu'il fallait montrer

1. $\Lambda_{CBV}(n) \approxeq \mathcal{L}_1(\Sigma_{\Lambda_{CBV}})_1(x_1 : v, \ldots, x_n : v, t)$ et

   $\Lambda^v_{CBV}(n) \approxeq \mathcal{L}_1(\Sigma_{\Lambda_{CBV}})_1(x_1 : v, \ldots, x_n : v, v)$
2. Commutativité avec la substitution par valeur
3. Fidélité à la réduction : bissimulation

Sources

- T. Hirschowitz, *Cartesian closed 2-categories and permutation equivalence in higher-order rewriting*
  HAL : hal-00540205, version 2 (2011)
- R. Crole *Categories for Types*, Cambridge Mathematical Textbooks (1993) *Chap.1-2,3-4*
- S. Awodey, *Category Theory*, Oxford Logic Guides 52 (2010)