# Programmation logique, unification et espace logarithmique

## Séminaire d'équipe LIMD du LAMA

C. Aubert[←] M. Bagnol[←] P. Pistone[←] Th. Seiller[→]

[←] Équipe *Logique De la Programmation*
Aix Marseille Université, CNRS, I2M UMR 7373
[→] Institut des Hautes Études Scientifiques

19 juin 2014

## Sources

- GIRARD « Normativity in Logic » (2012)
- AUBERT et SEILLER « Characterizing co-NL by a group action » (2012)
- AUBERT et SEILLER « Logarithmic Space and Permutations » (2013)
- AUBERT et BAGNOL « Unification and Logarithmic Space » (2014)

| Logique | G.d.I. | Programmation Logique |
|---|---|---|
| Axiome | Flot | Clause de Horn |
| Preuve | Câblage | Programme logique |
| Elimination des coupures | Équation de rétroaction | Résolution (unification) |
| Forte normalisation | Nilpotence | *Boundedness* |

## Outils

Algèbre, restrictions syntaxiques, réduction entre problèmes, etc.

## Résultats

Caractérisation du calcul en espace logarithmique

## Avancées

Nouvelles correspondances ?

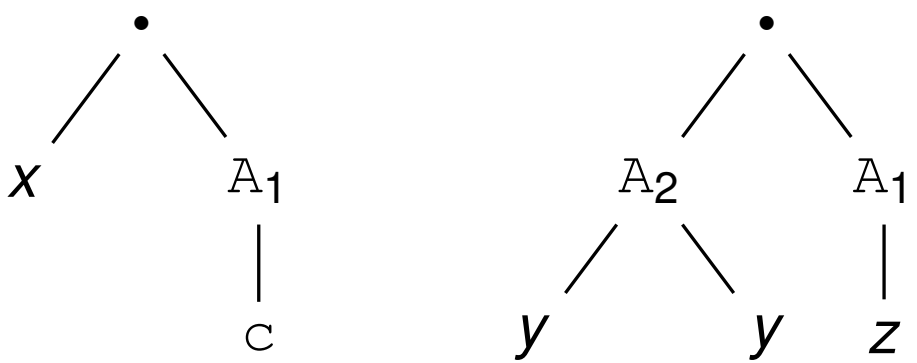
# Programmation logique

## Définition (Termes du premier ordre)

$$
\begin{array}{lcll}
t, u & := & \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots & \in \mathtt{C} \\
 & | & x, y, z, \ldots & \in \mathtt{V} \\
 & | & \mathtt{A}_n(t_1, \ldots, t_n) & n \in \mathbb{N}^* \\
 & | & t \bullet u & \text{avec } t \bullet u \bullet v := t \bullet (u \bullet v)
\end{array}
$$

## Exemple

$x \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{c})$ $\qquad$ $\mathtt{A}_2(y, y) \bullet \mathtt{A}_1(z)$

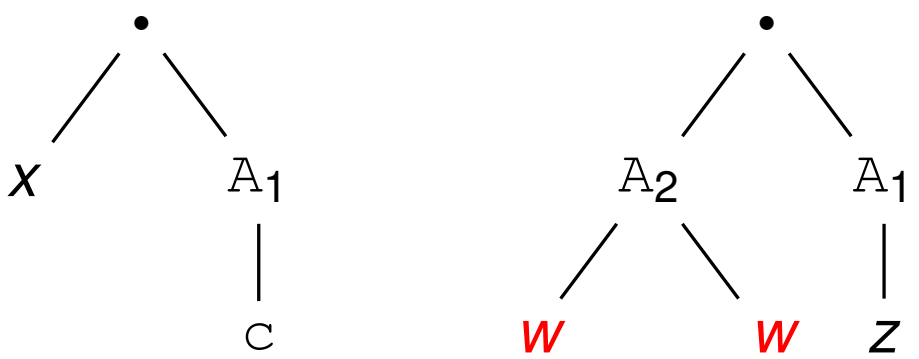


## Définition (Termes du premier ordre)

$$
\begin{array}{lcll}
t, u & := & \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots & \in \mathtt{C} \\
 & | & x, y, z, \ldots & \in \mathtt{V} \\
 & | & \mathtt{A}_n(t_1, \ldots, t_n) & n \in \mathbb{N}^* \\
 & | & t \bullet u & \text{avec } t \bullet u \bullet v := t \bullet (u \bullet v)
\end{array}
$$

## Exemple

$x \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{c})$ $\qquad$ $\mathtt{A}_2(w, w) \bullet \mathtt{A}_1(z)$

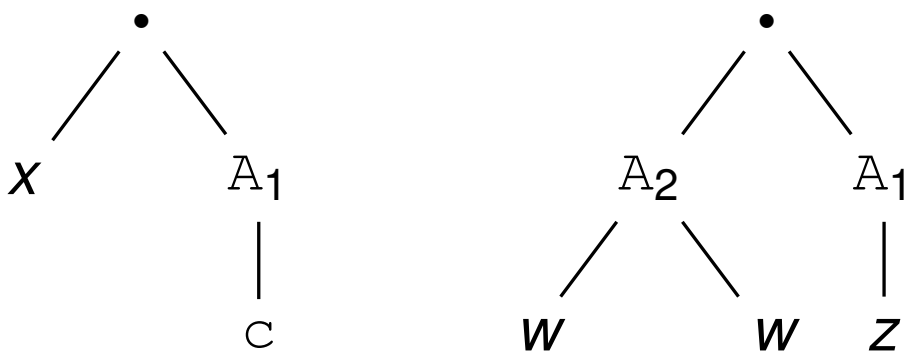


## Définition (Termes du premier ordre)

$$
\begin{array}{lcll}
t, u & := & \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots & \in \mathtt{C} \\
 & | & x, y, z, \ldots & \in \mathtt{V} \\
 & | & \mathtt{A}_n(t_1, \ldots, t_n) & n \in \mathbb{N}^* \\
 & | & t \bullet u & \text{avec } t \bullet u \bullet v := t \bullet (u \bullet v)
\end{array}
$$

## Exemple

$x \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{c})$ $\qquad$ $\mathtt{A}_2(w, w) \bullet \mathtt{A}_1(z)$ $\qquad$ Unifiables ?

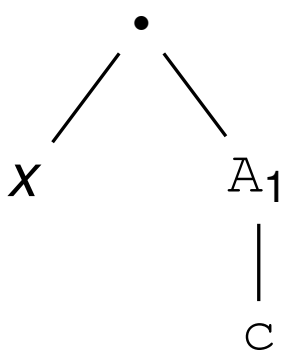


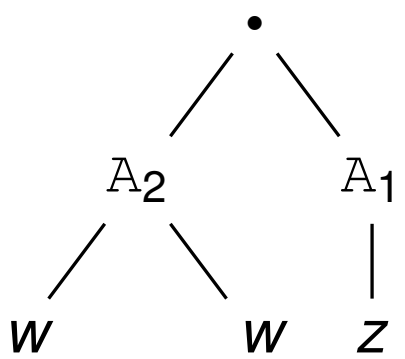
## Définition (Termes du premier ordre)

$$
\begin{array}{lcll}
t, u & := & \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots & \in \mathtt{C} \\
 & | & x, y, z, \ldots & \in \mathtt{V} \\
 & | & \mathtt{A}_n(t_1, \ldots, t_n) & n \in \mathbb{N}^* \\
 & | & t \bullet u & \text{avec } t \bullet u \bullet v := t \bullet (u \bullet v)
\end{array}
$$

## Exemple

$x \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{c})$ $\qquad$ $\mathtt{A}_2(w, w) \bullet \mathtt{A}_1(z)$ $\qquad$ Unifiables ?




✓

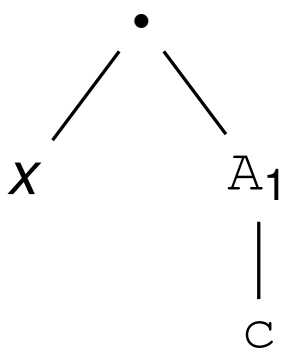
$\theta = [x/\mathtt{A}_2(w, w)\ ;\ z/c]$

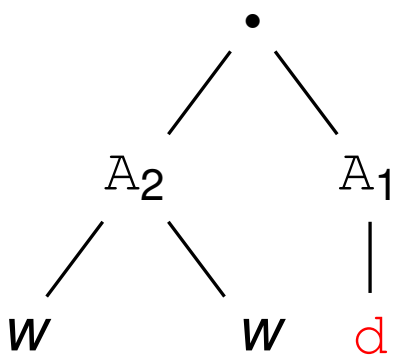
## Définition (Termes du premier ordre)

$$
\begin{array}{lcll}
t, u & := & \mathtt{c}, \mathtt{d}, \ldots & \in \mathtt{C} \\
 & | & x, y, z, \ldots & \in \mathtt{V} \\
 & | & \mathtt{A}_n(t_1, \ldots, t_n) & n \in \mathbb{N}^* \\
 & | & t \bullet u & \text{avec } t \bullet u \bullet v := t \bullet (u \bullet v)
\end{array}
$$

## Exemple

$x \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{c})$ $\qquad$ $\mathtt{A}_2(w, w) \bullet \mathtt{A}_1(\mathtt{d})$ $\qquad$ Unifiables ?




$\mathtt{c} \neq \mathtt{d}$

## Définition (Flots, câblages)

Un *flot* est une paire $t \leftharpoonup u$ avec $\mathtt{Var}(t) \subseteq \mathtt{Var}(u)$.
Un *câblage* est un ensemble fini de flots.

## Définition (Composition (ou produit) de flots)

Soient $u \leftharpoonup v$ et $t \leftharpoonup w$ deux flots, $\mathtt{Var}(v) \cap \mathtt{Var}(w) = \varnothing$,

$$(u \leftharpoonup v)(t \leftharpoonup w) := \begin{cases} u\theta \leftharpoonup w\theta & \text{si } v\theta = t\theta \\ \text{non défini} & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exemples

$$(\mathtt{f}(x) \leftharpoonup x)(\mathtt{f}(y) \leftharpoonup \mathtt{g}(y)) = \mathtt{f}(\mathtt{f}(y)) \leftharpoonup \mathtt{g}(y)$$

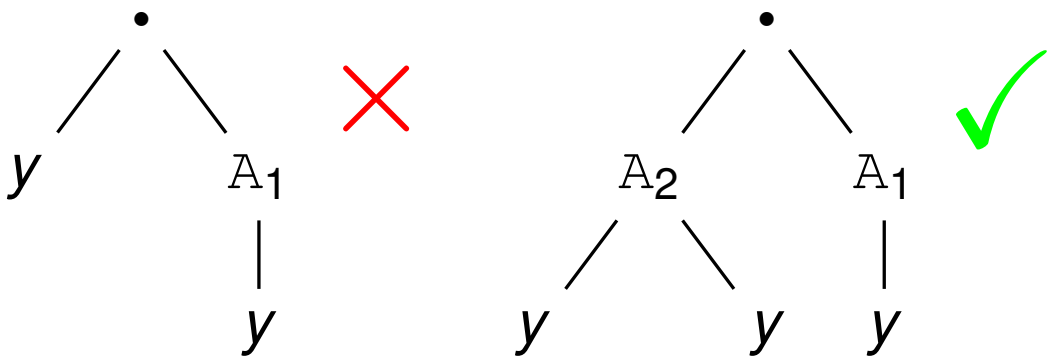
$$(x \bullet \mathtt{c} \leftharpoonup (y \bullet y) \bullet x)((\mathtt{c} \bullet \mathtt{c}) \bullet x \leftharpoonup y \bullet x) = x \bullet \mathtt{c} \leftharpoonup \mathtt{c} \bullet \mathtt{x}$$

$$(\mathtt{f}(x \bullet c) \leftharpoonup x \bullet \mathtt{d})(\mathtt{d} \bullet \mathtt{d} \leftharpoonup \star) = \mathtt{f}(\mathtt{d} \bullet \mathtt{c}) \leftharpoonup \star$$

## Définition (Balance)

« Un terme est *balancé* si toutes les occurrences d'une même variable apparaissent à la même hauteur. »
« Un flot est *balancé* si toutes les occurrences des mêmes variables apparaissent dans les deux termes à la même hauteur. »

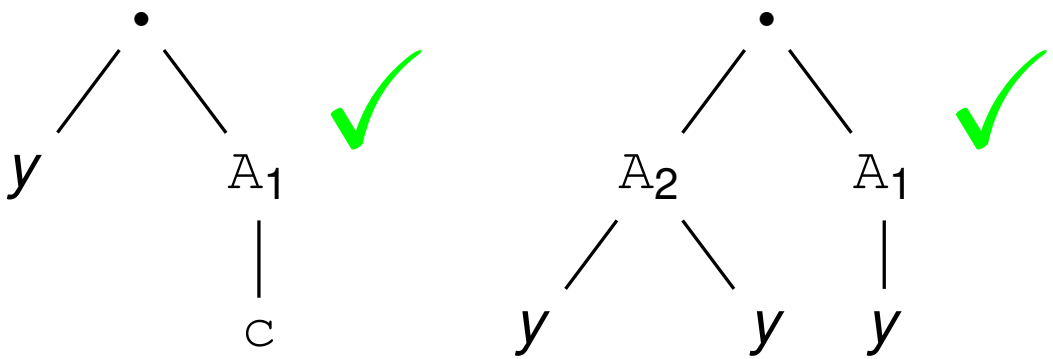
## Exemples



## Définition (Balance)

« Un terme est *balancé* si toutes les occurrences d'une même variable apparaissent à la même hauteur. »
« Un flot est *balancé* si toutes les occurrences des mêmes variables apparaissent dans les deux termes à la même hauteur. »

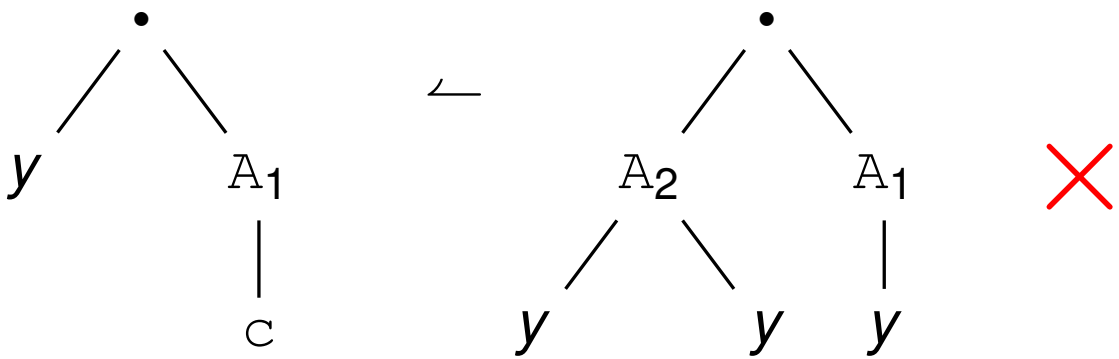
## Exemples



## Définition (Balance)

« Un terme est *balancé* si toutes les occurrences d'une même variable apparaissent à la même hauteur. »
« Un flot est *balancé* si toutes les occurrences des mêmes variables apparaissent dans les deux termes à la même hauteur. »

## Exemples



# Des programmes et des données

On note $u \leftrightharpoons t := u \leftharpoonup t + t \leftharpoonup u$.

## Définition (Représentation des mots)

Soient $\mathtt{p}_i \in \mathtt{C}$, $\mathtt{c}_i \in \Sigma$, un mot $W = \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n$, est représenté par le câblage $\bar{W} \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{W})$ :

$$
\begin{array}{lll}
 & \star & \leftrightharpoons \quad \mathtt{c}_1 \\
+ & \mathtt{c}_1 & \leftrightharpoons \quad \mathtt{c}_2 \\
 & & \vdots \\
+ & \mathtt{c}_n & \leftrightharpoons \quad \star
\end{array}
$$

On note $u \leftrightharpoons t := u \leftharpoonup t + t \leftharpoonup u$.

## Définition (Représentation des mots)

Soient $\mathtt{p}_i \in \mathtt{C}$, $\mathtt{c}_i \in \Sigma$, un mot $W = \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n$, est représenté par le câblage $\bar{W} \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{W})$ :

$$
\begin{array}{lll}
\star & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \leftrightharpoons \mathtt{c}_1 & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \\
+\ \mathtt{c}_1 & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \leftrightharpoons \mathtt{c}_2 & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_2) \\
 & \vdots & \\
+\ \mathtt{c}_n & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_n) \leftrightharpoons \star & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0)
\end{array}
$$

On note $u \leftrightharpoons t := u \leftharpoonup t + t \leftharpoonup u$.

## Définition (Représentation des mots)

Soient $\mathtt{p}_i \in \mathtt{C}$, $\mathtt{c}_i \in \Sigma$, un mot $W = \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n$, est représenté par le câblage $\bar{W} \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{W})$ :

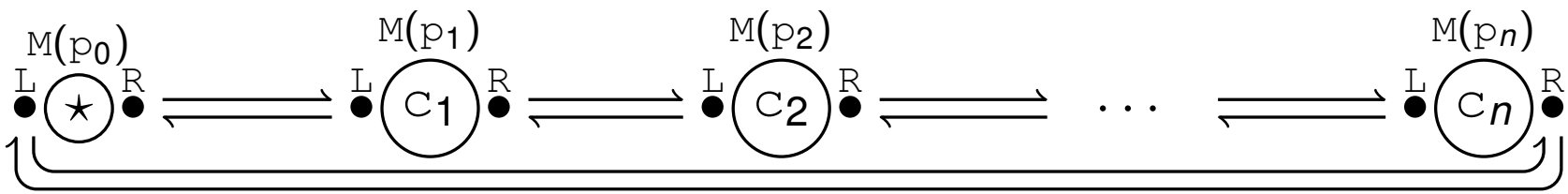
$$
\begin{array}{cccccc}
 & \star\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_1\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \\
+ & \mathtt{c}_1\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_2\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_2) \\
 & & & \vdots & & \\
+ & \mathtt{c}_n\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_n) & \leftrightharpoons & \star\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0)
\end{array}
$$

On note $u \leftrightharpoons t := u \leftharpoonup t + t \leftharpoonup u$.

## Définition (Représentation des mots)

Soient $\mathtt{p}_i \in \mathtt{C}$, $\mathtt{c}_i \in \Sigma$, un mot $W = \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n$, est représenté par le câblage $\bar{W} \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{W})$ :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \star\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_1\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \\
+ & \mathtt{c}_1\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_1) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_2\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_2) \\
 & & & \vdots & & \\
+ & \mathtt{c}_n\bullet\mathtt{L} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_n) & \leftrightharpoons & \star\bullet\mathtt{R} & \bullet\mathtt{M}(\mathtt{p}_0)
\end{array}
$$

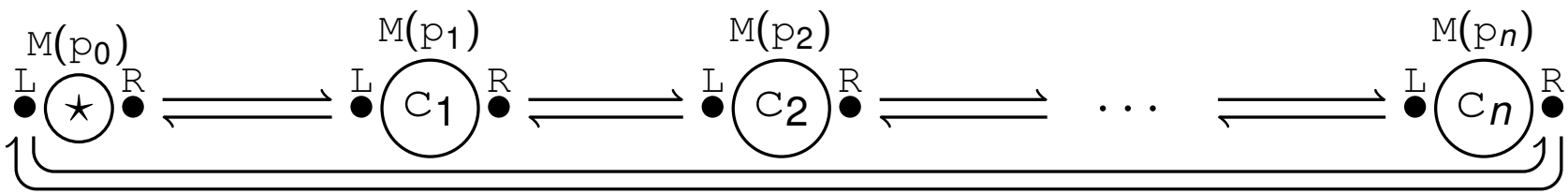


On note $u \leftrightharpoons t := u \leftharpoonup t + t \leftharpoonup u$.

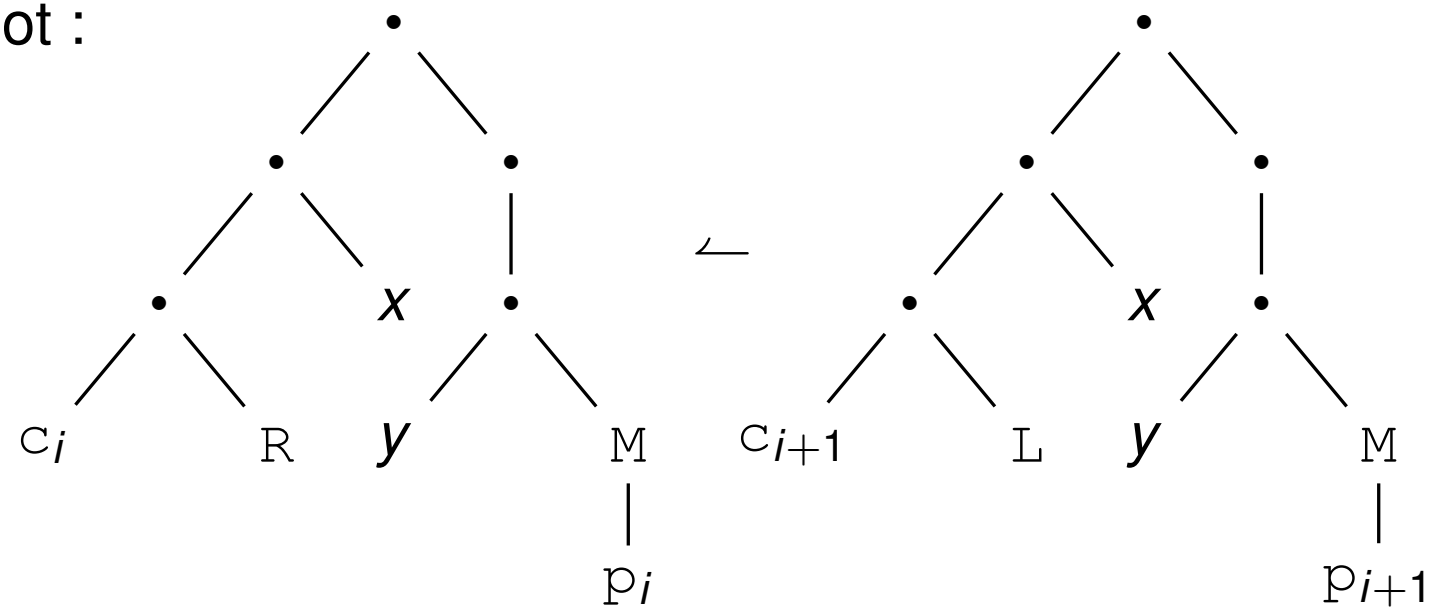
## Définition (Représentation des mots)

Soient $\mathtt{p}_i \in \mathtt{C}$, $\mathtt{c}_i \in \Sigma$, un mot $W = \mathtt{c}_1, \ldots, \mathtt{c}_n$, est représenté par le câblage $\bar{W} \in \mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{W})$ :

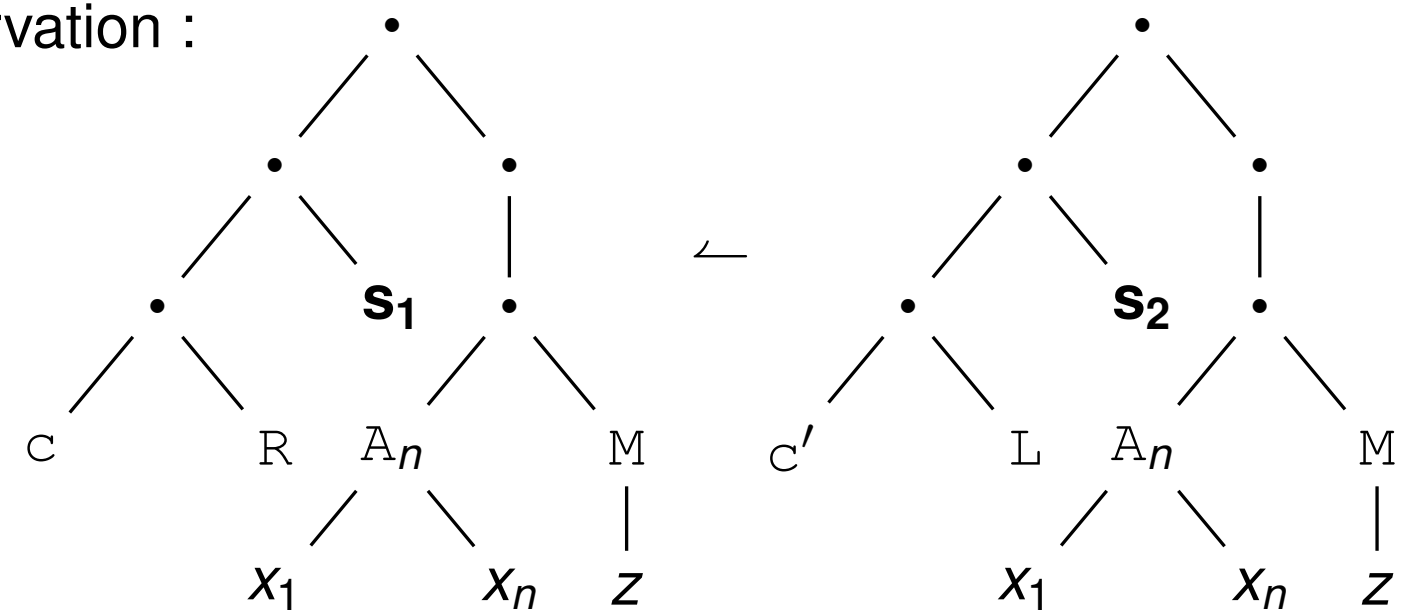
$$
\begin{array}{rrcl}
 & \star \bullet \mathtt{L} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_1 \bullet \mathtt{R} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \\
+ & \mathtt{c}_1 \bullet \mathtt{L} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) & \leftrightharpoons & \mathtt{c}_2 \bullet \mathtt{R} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_2) \\
 & & \vdots & \\
+ & \mathtt{c}_n \bullet \mathtt{L} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_n) & \leftrightharpoons & \star \bullet \mathtt{R} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0)
\end{array}
$$



Mot :




Observation :



# Fondations algébriques

**Lemme**

*L'ensemble des câblages $\mathcal{U}$ est un demi-anneau avec*

- $I := x \leftarrow x$,
- $0 := \emptyset$,
- *le produit est la composition,*
- *la somme (notée $+$) est la réunion.*

*(Il n'y a pas d'inverse pour l'addition.)*

**Lemme**

*L'ensemble des câblages balancés $\mathcal{U}_b$ est un demi-anneau.*

## Définition (Produit tensoriel)

Soient $u \leftharpoondown v$ et $t \leftharpoondown w$ deux flots, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux demi-anneaux,

$$(u \leftharpoondown v) \mathbin{\dot{\otimes}} (t \leftharpoondown w) := u \bullet t \leftharpoondown v \bullet w$$

Le produit $\mathcal{A} \mathbin{\dot{\otimes}} \mathcal{B}$ est également un demi-anneau :

$$\mathcal{A} \mathbin{\dot{\otimes}} \mathcal{B} := \left\{ \sum_i F_i \mathbin{\dot{\otimes}} G_i \;\middle|\; F_i \in \mathcal{A},\ G_i \in \mathcal{B} \right\}$$

On note $\mathcal{A} \mathbin{\dot{\otimes}} \mathcal{B} \mathbin{\dot{\otimes}} \mathcal{C} := \mathcal{A} \mathbin{\dot{\otimes}} (\mathcal{B} \mathbin{\dot{\otimes}} \mathcal{C})$.

## Exemple

$$\begin{aligned}(\mathtt{f}(x) \bullet y \leftharpoondown y \bullet x) \mathbin{\dot{\otimes}} (x \leftharpoondown \mathtt{g}(x)) &= (\mathtt{f}(x) \bullet y \leftharpoondown y \bullet x) \mathbin{\dot{\otimes}} (z \leftharpoondown \mathtt{g}(z)) \\ &= (\mathtt{f}(x) \bullet y) \bullet z \leftharpoondown (y \bullet x) \bullet \mathtt{g}(z)\end{aligned}$$

Soit $E$ un ensemble de termes clos, on note $E^{\leftarrow} := \left\{ \sum_i t_i \leftarrow u_i \;\middle|\; t_i, u_i \in E \right\}$

## Définition (Demi-anneaux de mots et d'observations)

Étant donnés deux ensembles de symboles $\mathtt{P}$ et $\mathtt{S}$, un symbole de fonction $\mathtt{M}$ et $\mathtt{LR} := \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, on définit :

$$\mathcal{W} := \mathcal{I} \dot{\otimes} \mathcal{I} \dot{\otimes} \mathtt{M}(\mathtt{P})^{\leftarrow} \quad \text{et} \quad \mathcal{O} := \mathtt{S}^{\leftarrow} \dot{\otimes} {\mathcal{U}_b}^{\backslash \mathtt{P}}$$

et $\mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{A}) := (\Sigma \cup \{\star\})^{\leftarrow} \dot{\otimes} \mathtt{LR}^{\leftarrow} \dot{\otimes} \mathcal{A}$.

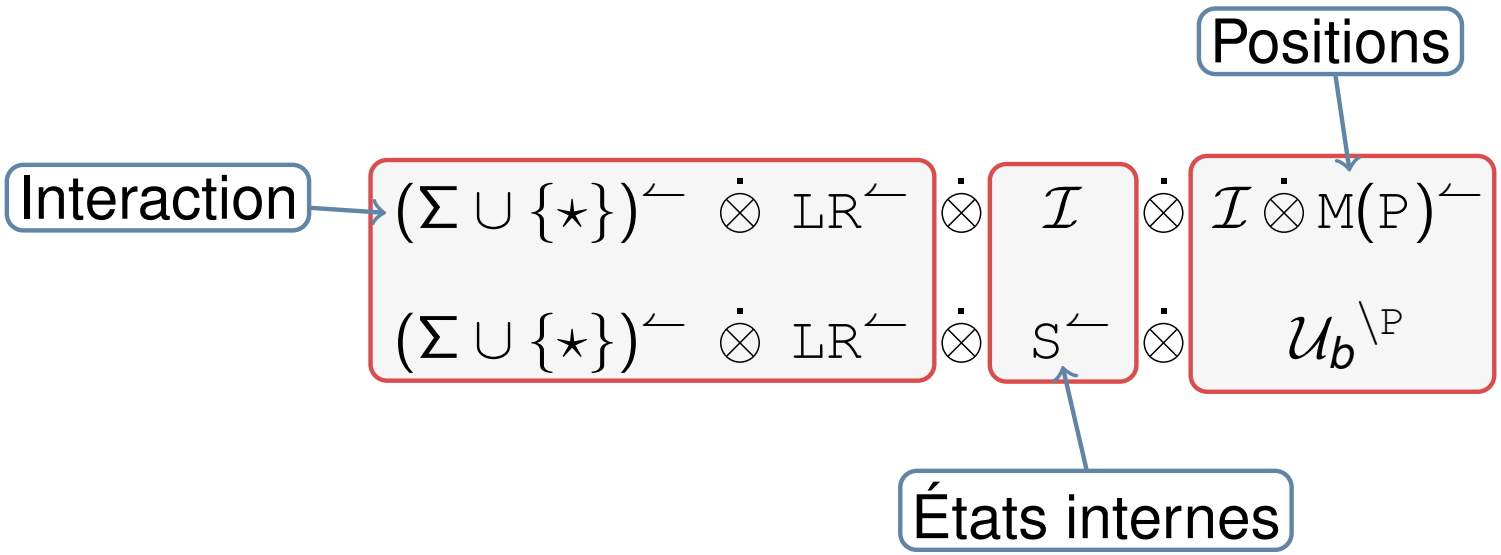
Soit $E$ un ensemble de termes clos, on note $E^{\leftarrow} := \left\{ \sum_i t_i \leftarrow u_i \;\middle|\; t_i, u_i \in E \right\}$

## Définition (Demi-anneaux de mots et d'observations)

Étant donnés deux ensembles de symboles $\mathtt{P}$ et $\mathtt{S}$, un symbole de fonction $\mathtt{M}$ et $\mathtt{LR} := \{\mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, on définit :

$$\mathcal{W} := \mathcal{I} \dot{\otimes} \mathcal{I} \dot{\otimes} \mathtt{M}(\mathtt{P})^{\leftarrow} \quad \text{et} \quad \mathcal{O} := \mathtt{S}^{\leftarrow} \dot{\otimes} \mathcal{U}_b{}^{\setminus \mathtt{P}}$$

et $\mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{A}) := (\Sigma \cup \{\star\})^{\leftarrow} \dot{\otimes} \mathtt{LR}^{\leftarrow} \dot{\otimes} \mathcal{A}$.



### Définition (Observation)

Une *observation* est un élément $O$ de $\mathcal{M}_\Sigma(\mathcal{O})$.

### Définition (Langage d'une observation)

Soit $O$ une observation sur l'alphabet $\Sigma$, son langage est

$$\mathcal{L}(O) := \left\{ W \in \Sigma^* \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}^*, (O\bar{W})^k = 0 \right\}$$

### Définition (Observation déterministe)

Soit $O = \sum_i u_i \leftharpoonup t_i$ une observation sur l'alphabet $\Sigma$, si tous les renommages des $t_i$ sont deux à deux non-unifiables, alors $O$ est déterministe.

# Pointeurs et complexité

**Théorème (Complétude (*Completness*))**

*Si* $L \in$ co-NL, *alors il existe une observation* $O$ *t.q.* $\mathcal{L}(O) = L$.
*Si* $L \in$ L, $O$ *peut être choisie déterministe.*

**Démonstration.**

Par encodage dans une observation d'un automate bi-directionnel à plusieurs têtes qui décide $L$. □

Soient $h_0, x, y \in \mathtt{Var}$, $\mathtt{p}_0, \mathtt{p}_1, \mathtt{A}_0 \in \mathtt{C}$ et $\Sigma = \{0, 1\}$.

$$\star \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(h_0) \leftarrow \star \bullet \mathtt{R} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(h_0) \qquad (o_1)$$

$$\star \bullet \mathtt{R} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \leftarrow 1 \bullet \mathtt{L} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \qquad (w_1)$$

$$1 \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(h_0) \leftarrow 1 \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{b} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(h_0) \qquad (o_2)$$

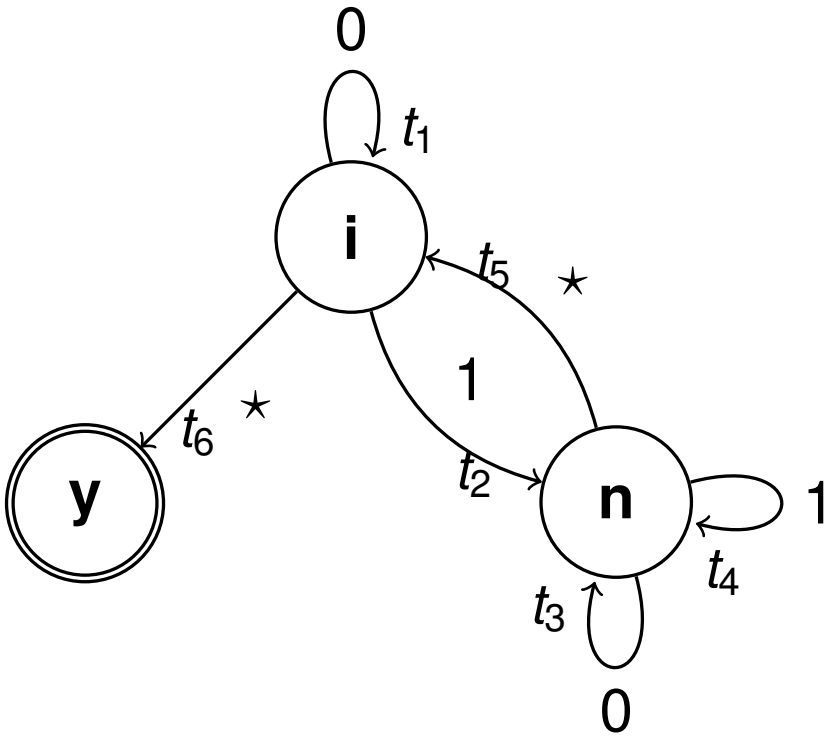
$$1 \bullet \mathtt{L} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \leftarrow \star \bullet \mathtt{R} \bullet x \bullet y \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \qquad (w_2)$$

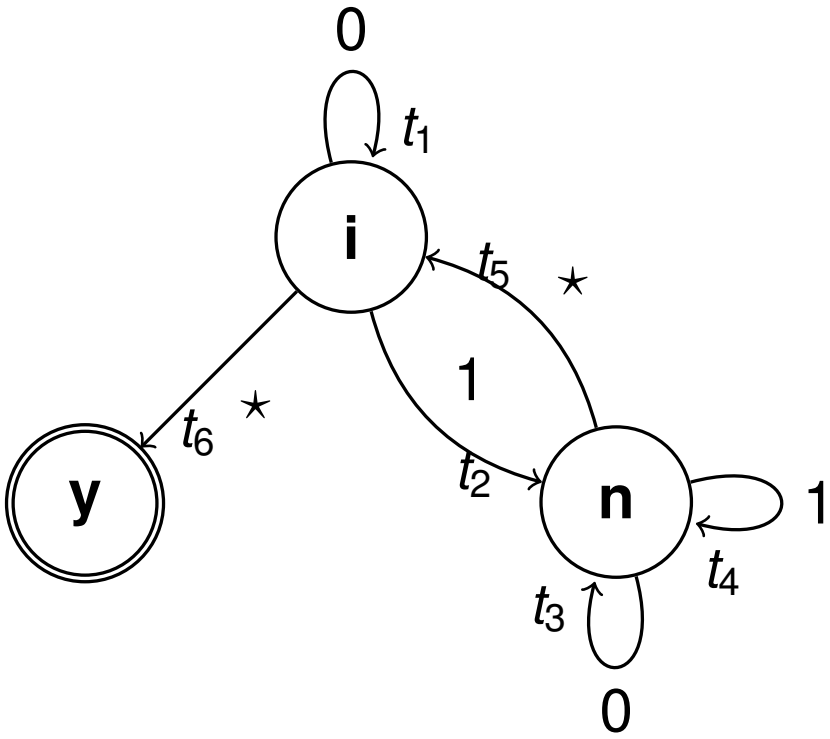
Par unification,

$$\star \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \leftarrow 1 \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \qquad (o_1 w_1)$$

$$\star \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \leftarrow 1 \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{b} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_1) \qquad (o_1 w_1 o_2)$$

$$\star \bullet \mathtt{L} \bullet \mathbf{init} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \leftarrow \star \bullet \mathtt{R} \bullet \mathbf{b} \bullet \mathtt{A}_0 \bullet \mathtt{M}(\mathtt{p}_0) \qquad (o_1 w_1 o_2 w_2)$$


0
$t_1$
i
$t_5$
$\star$
1
$t_6$
$\star$
$t_2$
y
n
1
$t_4$
$t_3$
0




$$0.\mathrm{R}.\mathbf{i}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow 0.\mathrm{L}.\mathbf{i}.v.\mathrm{M}(z)$$
$$1.\mathrm{R}.\mathbf{i}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow 1.\mathrm{L}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z)$$
$$0.\mathrm{R}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow 0.\mathrm{L}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z)$$
$$1.\mathrm{R}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow 1.\mathrm{L}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z)$$
$$\star.\mathrm{R}.\mathbf{n}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow \star.\mathrm{L}.\mathbf{i}.v.\mathrm{M}(z)$$
$$\star.\mathrm{R}.\mathbf{i}.v.\mathrm{M}(z) \leftarrow \star.\mathrm{L}.\mathbf{y}.v.\mathrm{M}(z)$$

# Câblages et graphes

## Théorème (Correction (*Soundness*))

*Si $O$ est une observation, alors $\mathcal{L}(O) \in$ co-NL.*
*Si de plus $O$ est déterministe, alors $\mathcal{L}(O) \in$ L.*

## Techniques

— Réduction au problème d'acyclicité d'un graphe dirigé, connu pour être dans CO-NL.

— Nécessite un cas particulier d'unification (« *matching* »), qui est dans L.

## Démonstration.

Étant donné un mot $W$, on fabrique $\bar{W}$ et on pose $O\bar{W} = F$.
Étant donné un câblage $F$ de hauteur $\mathtt{h}(F)$,

- L'ensemble des faits de hauteur $\mathtt{h}(F)$ est l'espace de calcul, noté $\mathbf{Comp}(F)$,
- cet ensemble est séparant : pour tout $(u \leftharpoonup \star) \in \mathbf{Comp}(F)$,
  - $F(u \leftharpoonup \star) \in \mathbf{Comp}(F)$,
  - $F^n(u \leftharpoonup \star) = 0$ implique $F^n = 0$.

Étant donné $\mathbf{Comp}(F)$, on peut fabriquer un graphe qui est acyclique ssi $F$ est nilpotent :

- Ses nœuds sont les éléments de $\mathbf{Comp}(F)$,
- Il y a une arête de $\mathbf{u} = u \leftharpoonup \star$ vers $\mathbf{v} = v \leftharpoonup \star$ ssi $\mathbf{v} \in F\mathbf{u}$.

□

$\mathbf{v} \in F\mathbf{u}$ ssi $\exists (t_1 \leftharpoonup t_2) \in F$ t.q. $(t_1 \leftharpoonup t_2)(u \leftharpoonup \star) = v \leftharpoonup \star$.

## Démonstration.

Étant donné un mot $W$, on fabrique $\bar{W}$ et on pose $O\bar{W} = F$.
Étant donné un câblage $F$ de hauteur $\mathtt{h}(F)$,

- L'ensemble des faits de hauteur $\mathtt{h}(F)$ est l'espace de calcul, noté $\mathbf{Comp}(F)$,
- cet ensemble est séparant : pour tout $(u \leftharpoonup \star) \in \mathbf{Comp}(F)$,
  - $F(u \leftharpoonup \star) \in \mathbf{Comp}(F)$,
  - $F^n(u \leftharpoonup \star) = 0$ implique $F^n = 0$.

Étant donné $\mathbf{Comp}(F)$, on peut fabriquer un graphe qui est acyclique ssi $F$ est nilpotent :

- Ses nœuds sont les éléments de $\mathbf{Comp}(F)$,
- Il y a une arête de $\mathbf{u} = u \leftharpoonup \star$ vers $\mathbf{v} = v \leftharpoonup \star$ ssi $\mathbf{v} \in F\mathbf{u}$.

On peut faire tout ça en espace logarithmique. □

$\mathbf{v} \in F\mathbf{u}$ ssi $\exists (t_1 \leftharpoonup t_2) \in F$ t.q. $(t_1 \leftharpoonup t_2)(u \leftharpoonup \star) = v \leftharpoonup \star$.

**Th. Dem.**
- Une preuve d'une observation, c'est quoi ?
- Analyse de SLL pour capturer P ?

◇

**Prog. Log.**
- Restrictions sur les termes ?
- Transferts de théorèmes ?

◇

**Complexité**
- Automates uni-directionnels
- Automates à plusieurs têtes $+$ piles = P

◇

**Méthode**
- Prendre une logique qui capture **C**,
- la traduire en GdI,
- regarder la sous-algèbre correspondante.

**Th. Dem.**
- Une preuve d'une observation, c'est quoi ?
- Analyse de SLL pour capturer P ?

◇

**Prog. Log.**
- Restrictions sur les termes ?
- Transferts de théorèmes ?

◇

**Complexité**
- Automates uni-directionnels
- Automates à plusieurs têtes + piles = P

◇

**Méthode**
- Prendre une logique qui capture **C**,
- la traduire en GdI,
- regarder la sous-algèbre correspondante.

☙ Merci !