Histoire de la Logique

Aubert Clément

14 février 2011

Table des matières

1 La Logique modale propositionnelle **7**

1.1 La syntaxe de la logique modale propositionnelle . . . 7

1.2 La sémantique de la logique propositionnelle . . . 7

1.2.1 Les modèles du langage . . . 7

2 La logique du premier ordre **11**

2.1 Syntaxe de la logique du premier ordre . . . 11

2.2 Sémantique de la logique du premier ordre . . . 12

2.2.1 Les structures relationnelles . . . 12

2.2.2 La valeur de vérité des structures . . . 13

3 Présentation simplifiée de la sémantique de Kripke **15**

3.1 Syntaxe . . . 15

3.1.1 La structure . . . 15

3.1.2 Le modèle : structure et valuation . . . 15

3.1.3 Les assignations . . . 16

3.1.4 Les termes . . . 16

3.2 Sémantique . . . 17

3.2.1 La relation $\models$ . . . 17

3.2.2 Vérité relative à une assignation, à un modèle, validité . . . 18

3.2.3 *De dicto, de re* . . . 20

3.2.4 Valide dans une structure, valide dans une classe . . . 20

4 La définissabilité dans la logique modale **21**

4.1 Réflexivité et schéma (T) . . . 21

4.2 D'autres résultats de définissabilité . . . 22

4.2.1 La transitivité . . . 23

4.2.2 La symétrie . . . 23

4.2.3 L'euclidianité . . . 23

5 Correspondance **25**

6 Trouver un contre-modèle **29**

6.1 $\not\models [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$ . . . 29

6.1.1 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$ . . . 29

6.1.2 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \Diamond(F(a) \wedge G(a))$ . . . 30

6.1.3 Pour résumer . . . 30

6.2 $\not\models \Box\exists x F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$ . . . 30

6.2.1 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Box\exists x F(x)$ . . . 30

6.2.2 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \exists x \Box F(x)$ . . . 31
6.2.3 Construction du modèle . . . 31
6.3 $\vDash \Diamond \exists x(x = a \wedge \Box F(x)) \to F(a)$ . . . 31
6.3.1 Démonstration par l'absurde . . . 31
6.4 Les formules de Barcan . . . 32
6.4.1 $\vDash \forall x \Box F(x) \to \Box \forall x F(x)$ . . . 32
6.4.2 $\vDash \forall x \Box \exists y\ y = x$ . . . 32
6.5 $\vDash \exists x \Box A \to \Box \exists x A$ . . . 33
6.5.1 Portée philosophique . . . 33
6.5.2 Modèle à univers variables . . . 33

7 Complétudes **35**
7.1 La logique propositionnelle . . . 35
7.1.1 Définition d'ensemble maximal consistant . . . 35
7.1.2 La complétude de la logique propositionnelle. . . . 37
7.2 La complétude de la logique modale . . . 38
7.2.1 Difficultés par rapport à la logique propositionnelle . . . 39
7.2.2 Le modèle canonique . . . 39
7.2.3 Vérité dans un modèle canonique . . . 40

8 Les arguments *slingshot* **43**
8.1 Présentation technique de Ix . . . 43
8.1.1 Syntaxe . . . 43
8.1.2 Sémantique . . . 44
8.1.3 Equivalence logique de $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$ . . . 45
8.1.4 Corolaire de l'équivalence logique . . . 45
8.2 Le *slingshot* de Gödel . . . 46
8.2.1 Les arguments employés . . . 46
8.2.2 Le *slingshot* . . . 46
8.3 L'argument de Church . . . 46
8.3.1 Les outils employés . . . 46
8.3.2 L'argument du *slingshot* de Church et Davidson . . . 47
8.4 Quine . . . 47
8.4.1 Les outils de Quine . . . 47
8.4.2 Le *slingshot* de Quine . . . 48

9 Exercices **49**
9.1 Exercices sur la logique modale propositionnelle . . . 49
9.1.1 Validité dans un monde, validité dans un modèle . . . 49
9.1.2 Validité d'une formule . . . 49
9.2 Exercices sur la logique du premier ordre . . . 50
9.3 Le Systeme de Carnap . . . 50
9.3.1 Quelques vérités logiques . . . 50
9.3.2 Les formules de Barcan . . . 51
9.3.3 Necessity of identicals . . . 51

10 Bissimulation **53**

11 La sémantique de Kripke pour la logique intuitioniste **59**

A Notes et compléments **61**
A.1 Matériel de rédaction 61
A.2 Considérations techniques 61
A.2.1 *Packages* employés 61
A.2.2 Autres outils techniques 61
A.2.3 Compilation 62
A.3 Coquilles et contact 62

Chapitre 1

La Logique modale propositionnelle

L'étude d'une logique se divise depuis le début du siècle et les travaux de Tarski en deux parties rigoureusement distinguées :

- La syntaxe, qui se contente de vérifier que les énoncés sont formulés dans le respect des règles du langage choisi (ici, un langage propositionnel enrichi de connecteurs modaux).
- La sémantique, elle, étudie les valeurs de vérité des énoncés ainsi formés.

1.1 La syntaxe de la logique modale propositionnelle

Le langage que l'on se donne est un langage propositionnel. Il est constitué :

- du symbole $\perp$ (l'absurde)
- de symboles atomiques, q, q', p_1, p_2, etc.
- de connecteurs :
  - la négation, $\neg$
  - la disjonction, $\vee$
  - la conjonction, $\wedge$
  - l'implication, $\rightarrow$
  - l'équivalence, $\leftrightarrow$
- d'opérateurs modaux, au nombre de deux :
  - la nécessité, $\Box$
  - la possibilité, $\Diamond$

On note $\mathcal{L}$ ce langage, il varie en fonction des atomes que l'on se donne.

1.2 La sémantique de la logique propositionnelle

1.2.1 Les modèles du langage

Définition 1 *Un modèle $\mathcal{M}$ du langage $\mathcal{L}$ a la forme $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$, avec :*

- *W : la collection des mondes possibles, $W \neq \emptyset$.*
- *P : la fonction d'interprétation qui associe à chaque atome propositionnel p de $\mathcal{L}$ la classe $P(p) \subseteq W$, qui représente les mondes possibles dans lesquels p est*

le cas.

Définition 2 (La relation $\models$) *On définit « A est $vraie$ dans le monde w du modèle $\mathcal{M}$ », $\mathcal{M}, w \models A$ par récurrence sur la hauteur (la complexité, la longueur) des formules :*

- $\mathcal{M}, w \models p_i \iff w \in P(p_i)$
- $\mathcal{M}, w \models \neg A \iff \mathcal{M}, w \not\models A$
- $\mathcal{M}, w \models A \vee B \iff \mathcal{M}, w \models A$ *ou* $\mathcal{M}, w \models B$
- $\mathcal{M}, w \models A \wedge B \iff \mathcal{M}, w \models A$ *et* $\mathcal{M}, w \models B$
- $\mathcal{M}, w \models A \to B \iff \mathcal{M}, w \not\models A$ *ou* $\mathcal{M}, w \models B$
- $\mathcal{M}, w \models A \leftrightarrow B \iff \mathcal{M}, w \models A$ *et* $\mathcal{M}, w \models B$*, ou* $\mathcal{M}, w \not\models A$ *et* $\mathcal{M}, w \not\models B$
- $\mathcal{M}, w \models \Box A \iff$ *Pour chaque* w' *dans* W : $\mathcal{M}, w' \models A$
- $\mathcal{M}, w \models \Diamond A \iff$ *S'il existe au moins un* w' *dans* W : $\mathcal{M}, w' \models A$

Exemple 3 *Soient :*

$\mathcal{L} = \{p, q\}$.
$\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$*, avec :* - $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $P(p) = \{w_1, w_3\}$
- $P(q) = \{w_2, w_3\}$

On peut vérifier que :

- $\mathcal{M}, w_1 \models p$*, puisque* $w_1 \in P(p)$.
- $\mathcal{M}, w_4 \not\models p$*, puisque* $w_4 \notin P(p)$.
- $\mathcal{M}, w_3 \models q \wedge q$*, puisque* $w_3 \in P(q)$.
- $\mathcal{M}, w_2 \not\models p \vee \neg q$*, puisque* $w_2 \notin P(p)$ *et* $w_2 \in P(q)$
- $\mathcal{M}, w_4 \models p \leftrightarrow q$*, puisque* $w_4 \notin P(p)$ *et* $w_4 \notin P(q)$.
- $\mathcal{M}, w_3 \models \Diamond q$*, puisque* $w_2 \in P(q)$.
- $\mathcal{M}, w_4 \models \Box(\neg q \vee q)$*, puisque* $\mathcal{M}, w_i \models (\neg q \vee q)$ *pour* $1 \leq i \leq 4$*, car* $w_1 \notin P(q)$, $w_2 \in P(q)$, $w_3 \in P(q)$ *et* $w_4 \notin P(q)$.
- $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond(\neg p \to p)$*, puisque* $\mathcal{M}, w_1 \models \neg p \to p$*, car* $\mathcal{M}, w_1 \not\models \neg p$*, car* $w_1 \in P(p)$.
- $\mathcal{M}, w_2 \models \neg\Box q$ *car* $\mathcal{M}, w_4 \not\models q$ *puisque* $w_4 \notin P(q)$.

La figure 1.1 illustre quelques formules vraies dans les différents mondes.

Exercice 4 *Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses par rapport au modèle de l'exemple :*

1. $\mathcal{M}, w_1 \models \Box p$
2. $\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond q$
3. $\mathcal{M}, w_3 \models p \leftrightarrow q$
4. $\mathcal{M}, w_4 \not\models \Diamond q \vee \Diamond p$
5. $\mathcal{M} \models \Diamond[(p \wedge q) \to p] \wedge \Box(p \vee \neg p)$

La Validité

Soit $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ un modèle du langage $\mathcal{L}$.
Si on a $\mathcal{M}, w \models A$ pour chaque monde possible w, *on dit que* A *est valide dans le modèle* $\mathcal{M}$, et on écrit $\mathcal{M} \models A$.
Si A n'est pas valide dans les mondes de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire s'il existe un monde v de W

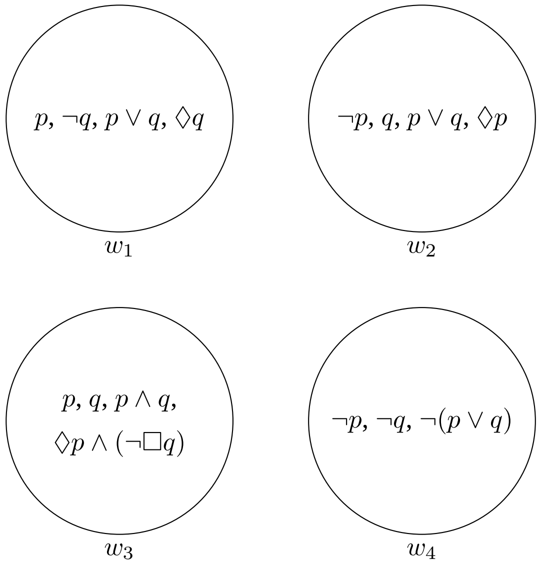


FIGURE 1.1 – Vérités dans les mondes

tel que $\mathcal{M}, v \not\models A$, on écrit $\mathcal{M} \not\models A$.

Enfin, on dit que A est valide dans la classe des modèles de C, $C \models A$, et on écrit $\models A$ si $\mathcal{M} \models A$ pour chaque modèle $\mathcal{M}$ de C.

Exercice 5 *Soit* $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ *avec*
- $W = \{w_1, w_2\}$
- $P_(p) = \{w_1, w_2\}$
- $P_(q) = \{w_1\}$.

On a : - $\mathcal{M}, w_1 \models p \vee q$*, car* $\mathcal{M}, w_1 \models p$ *et* $\mathcal{M}, w_1 \models q$
-$\mathcal{M}, w_2 \models p \vee q$*, car* $\mathcal{M}, w_2 \models p$*.*

Vérifiez que le modèle $\mathcal{M}$ *tel que défini ci-dessus vérifie :*
- $\mathcal{M}, w_2 \models q \to p$
- $\mathcal{M}, w_1 \models p \wedge q$
- $\mathcal{M} \models \Box p$
- $\mathcal{M} \models \Box(p \vee q)$
- $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond q$

Fait 6 *Le schéma* $\Box A \to A$*, où* A *est n'importe quel énoncé, est une valide dans la classe de tous les modèles semblables.*

Proposition 7 *Si* A *est valide, alors* $\Box A$ *est valide aussi.*

Démonstration 8 *Soit* $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$*. Etant donné que* A *est valide, alors* $\mathcal{M}, w \models A$ *pour chaque monde* $w \in W$*.*
Donc $\mathcal{M}, w \models \Box A$ *pour chaque* $w \in W$*, donc* $\mathcal{M} \models \Box A$*.*

Proposition 9 $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ *est valide.*

Démonstration 10 *Il faut montrer que pour chaque modèle* $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ *on a* $\mathcal{M} \models C$, *avec* $C =: \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

- *Si* $\mathcal{M}, w \not\models A \to B$ *avec* $w \in W$, *alors* $\mathcal{M} \not\models \Box(A \to B)$ *et on a* $\mathcal{M} \models C$ *par défaut de l'antécédant de l'implication principale.*
- *Si* $\mathcal{M} \models A \to B$ *et* $\mathcal{M}, w \not\models A$, *on a alors* $\mathcal{M} \not\models \Box A$ *et* $\mathcal{M} \models \Box A \to \Box B$ *par défaut de l'antécédent. Puisque* $\mathcal{M} \models A \to B$, *on a par 7* $\mathcal{M} \models \Box(A \to B)$, *donc* $\mathcal{M} \models C$
- *Si* $\mathcal{M} \models A \to B$, *et* $\mathcal{M} \models A$, *alors* $\mathcal{M} \models B$. *Par 7* $\mathcal{M} \models \Box(A \to B)$, $\mathcal{M} \models \Box A$ *et* $\mathcal{M} \models \Box B$, *donc* $\mathcal{M} \models C$.

On a épuisé les différents cas possibles, c'est donc que la formule C *est valide dans tout modèle et pour toutes les formules* A *et* B.

Exercice 11 *Montrer que les formules suivantes sont valides dans la classe de tous les modèles :*

- $\Box A \to \Diamond A$
- $\Box A \to A$
- $A \to \Box\Diamond A$
- $\Box A \to \Box\Box A$
- $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

Chapitre 2

La logique du premier ordre

La logique du premier ordre a un pouvoir d'expression plus grand que la logique propositionnelle. On peut formuler des énoncés comme :

Chaque état a un président.

sous la forme

$$\forall x(Etat(x) \rightarrow \exists y \textit{Président}(x,y))$$

2.1 Syntaxe de la logique du premier ordre

On va maintenant composer la logique du premier ordre avec la logique modale pour obtenir la logique modale du premier ordre. On commence par passer en revue les concepts de base de la logique du premier ordre.
Dans la logique propositionnelle on commence avec un ensemble de formules atomiques p_0, p_1, q, q'...
Dans la logique du premier ordre on commence avec un ensemble T de symboles de relations, de fonctions et constantes individuelles. Chaque symbole de relation et de fonction a une arité, un degré, qui correspond au nombre d'arguments qu'il peut prendre. Dans notre exemple, le symbole *Président* a le degré 2.
On suppose aussi qu'il y a un nombre infini de variables x, y, x_0, y', ... Les constantes individuelles et les variables vont désigner des individus dans un domaine de discours, un univers. Ce sont des termes. On peut aussi former des termes plus compliqués à l'aide des symboles de fonction.

Définition 12 *On hierarchise alors notre langage :*

Les termes *sont les plus petites composantes de notre langage.*

1. *Les constantes du langage sont des termes. On les note c, d, etc.*
2. *Les variables du langage sont des termes. On les note x, y x_0, y', etc.*
3. *si $t_1, ..., t_n$ sont des termes, et f un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme également.*

Les formules atomiques *sont de deux formes :*

1. *$P(t_1, ..., t_n)$, avec P un symbole de relation de degré n et $t_1, ..., t_n$ des termes.*

2. *$t_1 = t_2$ avec t_1 et t_2 des termes.*

Les formules *sont définies par récurrence à partir des formules atomiques. Si A et B sont des formules et x une variable, alors sont des formules : $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, $\exists x A$ et $\forall x A$.*

Convention 13 *On convient pour la suite de ce cours des points suivants :*

- *On dit d'une occurence d'un variable x apparaissant dans A qu'elle est liée dans $\forall x A$ et $\exists x A$.*
- *Une occurence d'une variable qui n'est pas liée est dite libre.*
- *Une formule dans laquelle il n'y a pas d'occurence de variable libre est un énoncé.*
- *Le langage que l'on va considérer ne comporte pas de symboles fonctionnels.*

2.2 Sémantique de la logique du premier ordre

2.2.1 Les structures relationnelles

On interprète le langage du premier ordre dans des *structures relationnelles*.
Une structure relationnelle se compose :

- d'un univers de discours D, qui est un ensemble d'individus toujours différent du vide,
- et d'une fonction d'interprétation I.

Ainsi, $I(c)$ est un élément de D, pour chaque constante individuelle c, et $I(R)$ est une relation telle que pour chaque symbole de relation R de degré n, $I(R) \subseteq D^n$.

Exemple 14 *: Supposons que le langage ne contienne que le symbole de relation $<$. Soit $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ une structure où $D = \{1, 2, 3, ...\}$. $I(<) = \{(n, m) : n, m \in D$, n est plus petit que $m\} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \cdots, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, ...\}$ est leur relation dans D.*

On observe que la structure relationnelle ne donne pas une interprétation aux variables individuelles. Pour cela on a besoin d'une *assignation*, une fonction g dont les arguments sont des variables individuelles et les valeurs sont des individus dans D.

Définition 15 *Une fois qu'on a introduit une structure relationnelle $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ et une assignation g dans $\mathcal{M}$, on peut définir la dénotation d'un terme t du langage dans $\mathcal{M}$ relativement à g :*

$$t^{\mathcal{M},g} = \begin{cases} I(c) \text{ si } t \text{ est une constante individuelle } c \\ g(x) \text{ si } t \text{ est une variable individuelle } x \end{cases}$$

Exemple 16 *Soient $Beau$ un symbole de relation et c une constante individuelle. Soit $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ un modèle tel que $D = \{Jacques, Pierre\}$, $I(c) = Jacques$, $I(Beau) = \{Jacques\}$.*
Intuitivement l'énoncé $Beau(c)$ est vrai dans $\mathcal{M}$ si et seulement si $I(c) \in I(Beau)$, c'est-à-dire si et seulement si $Jacques \in \{Jacques\}$, ce qui est le cas.

Définition 17 *Pour une assignation g et un individu a dans D, $g(x/a)$ est l'assignation qui est identique à g pour toutes les variables $y \neq x$, et $g(x/a)(x) = a$.*

En d'autres termes : $\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$

Exemple 18 *En reprenant $\mathcal{M}$ comme précédemment, on a $g(x/c)(x) = c$, autrement dit x est c, c'est-à-dire $Jacques$. De même, on a $g(x/c)(y) = y$ et $g(y/c)(y) = c$.*

On peut maintenant définir la notion de vérité d'une formule dans une structure relativement à une assignation.

2.2.2 La valeur de vérité des structures

Soient $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ une structure d'interprétation, avec D l'univers de discours (l'ensemble des individus), I la fonction d'interprétation.

- $\mathcal{M}, g \models P(t_1, ..., t_n) \leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M},g}, ..., t_n^{\mathcal{M},g}) \in I(P)$
- $\mathcal{M}, g \models \neg A \leftrightarrow \mathcal{M}, g \not\models A$
- $\mathcal{M}, g \models A \wedge B \leftrightarrow \mathcal{M}, g \models A$ et $\mathcal{M}, g \models B$
- $\mathcal{M}, g \models A \vee B \leftrightarrow \mathcal{M}, g \models A$ ou $\mathcal{M}, g \models B$
- $\mathcal{M}, g \models \exists x A$ si et seulement si il y a un individu $a \in D$ tel que $\mathcal{M}, g(x/a) \models A$
- $\mathcal{M}, g \models \forall x A$ si et seulement si pour tout individu $a \in D$, $\mathcal{M}, g(x/a) \models A$

Exemple 19 *Soient $\mathcal{L}$ un langage qui contient une constante individuelle c et un symbole de relation R à deux places. Soit $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ une structure relationnelle où :*

- $D = \{1, 2\}$
- $I(c) = 1$, $I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$.

Soient $g(x_1) = 1$ et $g(x_n) = 2$ pour $n = 2, 3, 4, ...$.
On a

- $c^{\mathcal{M},g} = I(c) = 1$
- $x^{\mathcal{M},g} = g(x_1) = 1$
- $x_n^{\mathcal{M},g} = g(x_n) = 2$ *pour* $n \geq 2$.

Donc

- $\mathcal{M}, g \models R(c, x_2)$ *car* $\langle c^{\mathcal{M},g}, x_2^{\mathcal{M},g}\rangle \in I(R)$
- $\mathcal{M}, g \models \neg R(c, x_1)$ *car* $\langle c^{\mathcal{M},g}, x_1^{\mathcal{M},g}\rangle \notin I(R)$
- $\mathcal{M}, g \models \exists x_1 R(x_1, x_2)$ *puisqu'il y a* 1 *tel que* $\mathcal{M}, g(x_1/1) \models R(x_1, x_2)$.

Fait 20 *Un énoncé est sans variable libre, donc sa valeur de vérité ne dépend pas des assignations.*

Démonstration 21 *Si A est un énoncé (sentence), alors pour chaque structure $\mathcal{M} = \langle D, I \rangle$ et chaque assignation g et g' dans $\mathcal{M}$, on a :*

$$\mathcal{M}, g \models A \leftrightarrow M, g' \models A$$

Chapitre 3

Présentation simplifiée de la sémantique de Kripke

Nous allons simplifier la sémantique de Kripke, en considérant que tous les mondes ont le même univers. On verra en 6.5.2 comment considérer les modèles à univers variable.

3.1 Syntaxe

3.1.1 La structure

Le point de départ est la notion de structure : $S = \langle W, D, w_0 \rangle$ où :
- W est un ensemble non-vide de mondes possibles. On emploie $w_1, w_2, v, v_1, ...$ pour désigner ces mondes.
- D est l'univers de discours, appelé aussi le domaine de S.
- w_0 est le monde actuel ($w_0 \in W$).

3.1.2 Le modèle : structure et valuation

On forme un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ basé sur S en ajoutant à S une valuation I :
- I assigne à chaque couple constante individuelle c - monde w dans W, un individu de D, noté $I(w, c)$, qui est l'individu désigné par c dans le monde w par I.
- I assigne à chaque couple symbole de prédicat P - monde possible w dans W une extension, notée $I(w, P)$: c'est l'extension du symbole P dans w selon I. L'extension est une relation et dépend du nombre de place du symbole P, de son arité. Ainsi, si l'arité de P est n, $I(w, P) \subseteq D^n$.

Exemple 22 *On se dote du langage $\mathcal{L}$ qui contient deux constantes individuelles, c et d, et deux symboles de prédicats, P et Q, P étant à une place, Q à deux.*

Soit $S = \langle W, D, w_0 \rangle$ avec : - $W = \{w_0, w_1\}$
- $D = \{a_1, a_2\}$

Soit $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ un modèle basé sur S où I est défini de la façon suivante :

– *Pour les constantes individuelles :*
  $I(w_0, c) = a_1 \quad I(w_1, c) = a_2$
  $I(w_0, d) = a_2 \quad I(w_1, d) = a_2$
  C'est-à-dire que c désigne a_1 dans w_0 et a_2 dans w_1, d désigne a_2 aussi bien dans w_0 que dans w_1.

– *Pour les prédicats :*
  $I(w_0, P) = \{a_1\} \qquad I(w_1, P) = \{a_1, a_2\}$
  $I(w_0, Q) = \{\langle a_1, a_2\rangle\} \quad I(w_1, Q) = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$
  C'est-à-dire que l'extension de P dans w_0 est $\{a_1\}$, l'extension de P dans w_1 est $\{a_1, a_2\}$.
  De même, l'extension de Q dans w_0 est $\{\langle a_1, a_2\rangle\}$, l'extension de Q dans w_1 est $\{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$.

3.1.3 Les assignations

On introduit desormais la notion d'assignation. Une assignation g assigne à chaque variable x un individu : $g(x) \in D$.
Si g est une assignation, et a un individu appartenant à D, alors $g(x/a)$ est l'assignation identique à g, sauf qu'elle assigne à la variable x l'individu a. En d'autres termes :

$$\begin{cases} g(x/a)(y) & = g(y) \text{ pour chaque } y \neq x \\ g(x/a)(x) & = a \end{cases}$$

3.1.4 Les termes

On définit les termes d'un langage du premier ordre de la façon suivante :

1. Chaque constante est un terme.
2. Chaque variable est un terme.
3. Rien n'est un terme que ce qui est défini par les clauses 1. et 2.

Maintenant qu'on a défini les notions de structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$, de modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ basé sur S, et qu'on a fixé une assignation g, on observe que pour chaque monde w, chaque terme t reçoit une valeur sémantique relativement à w et à g, que l'on note $t^{w,g}$:

– Si t est une constante individuelle c, alors $c^{w,g}$ est $I(w, c)$
– Si t est une variable x, alors $x^{w,g}$ est $g(x)$.

Encore une fois, on observe que la valeur sémantique d'une constante individuelle varie d'un monde à l'autre, car il se peut très bien que $c^{w_1,g} \neq c^{w_2,g}$, alors que la valeur sémantique d'une variable x est constante : $x^{w_1,g} = x^{w_2,g}$, quels que soient w_1, w_2 et g.

Exemple 23 *Soit S une structure et $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ un modèle basé sur S, tous deux comme dans l'exemple précédent (voir 22).*

Soit g l'assignation qui assigne à chaque variable l'individu a_1 : $g(x_1) = g(x_2) = ... = a_1$.

$g(x_2/a_2)$ *est l'assignation :* $g(x_2/a_2)(x_1) = g(x_2/a_2)(x_3) = g(x_2/a_2)(x_4) = ... = a_1$
$g(x_2/a_2)(x_2) = a_2$

$g(x_3/a_2)$ *est l'assignation :* $g(x_3/a_2)(x_1) = g(x_3/a_2)(x_2) = g(x_3/a_2)(x_4) = ... = a_1$

$$g(x_3/a_2)(x_3) = a_2$$

On peut maintenant calculer :

Pour le monde w_0 *:*
$c^{w_0,g} = I(w_0, c) = a_1$
$d^{w_0,g} = I(w_0, d) = a_2$
$x_1^{w_0,g} = g(x_1) = a_1$
$x_2^{w_0,g} = g(x_2) = a_1$
$x_1^{w_0,g(x_2/a_2)} = g(x_2/a_2)(x_1) = a_1$
$x_2^{w_0,g(x_2/a_2)} = g(x_2/a_2)(x_2) = a_2$

Pour le monde w_1 *:*
$c^{w_1,g} = I(w_1, c) = a_2$
$d^{w_1,g} = I(w_1, d) = a_2$
$x_1^{w_1,g} = g(x_1) = a_1$
etc.

3.2 Sémantique

3.2.1 La relation $\models$

Fixons la structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$, un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ basé sur S et une assignation g dans $\mathcal{M}$. Pour chaque monde possible w dans W et chaque formule A du langage modal de premier ordre, on définit la relation sémantique :

$$\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A$$

C'est-à-dire : A est vraie dans le monde possible w relativement à l'assignation g.
On définit ensuite par récurrence sur la hauteur de A, A et B étant des formules du langage modal de premier ordre :

– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models P(t_1, ..., t_n) \iff \langle t_1^{w,g}, ..., t_n^{w,g}\rangle \in I(w, P)$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models t_1 = t_2 \iff t_1^{w,g}$ est identique à $t_2^{w,g}$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models \neg A \iff \langle \mathcal{M}, w, g\rangle \not\models A$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A \wedge B \iff \langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A$ et $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models B$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A \vee B \iff \langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A$ ou $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models B$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models \forall x A \iff$ pour chaque a dans D on a $\langle \mathcal{M}, w, g(x/a)\rangle \models A$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models \exists x A \iff$ il y a un individu a dans D tel que $\langle \mathcal{M}, w, g(x/a)\rangle \models A$
– $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models \Box A \iff$ pour chaque monde v dans W : $\langle \mathcal{M}, v, g\rangle \models A$

Exemple 24 *Soient* $S = \langle W, D, w_0\rangle$, $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ *et* g *comme dans les exemples précédents. On a :*

•$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models P(c)$*, car* $c^{w_0,g} \in I(w_0, P)$
En effet, si on interprète : $a_1 \in \{a_1\}$

•$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models Q(c, c)$*, car* $\langle c^{w_0,g}, c^{w_0,g}\rangle \in I(w_0, Q)$
En interprétant : $\langle a_1, a_1\rangle \in \{\langle a_1, a_1\rangle\}$

•$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models P(d)$*, car* $d^{w_0,g} \notin I(w_0, P)$
On vérifie en effet que : $a_2 \notin \{a_1\}$

•$\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models c = d$*, car* $c^{w_1,g} = I(w_1, c) = a_2$
$d^{w_1,g} = I(w_1, d) = a_2$
Les interprétations de c *et de* d *dans le monde* w_1 *en fonction de* g *sont donc identiques.*

•$\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \forall x_1 P(x_1)$*, car* $\begin{cases} 1)\langle \mathcal{M}, w_1, g(x_1/a_1)\rangle \models P(x_1) \\ \text{et} \\ 2)\langle \mathcal{M}, w_1, g(x_1/a_2)\rangle \models P(x_1) \end{cases}$
Pour montrer 1), nous observons que :

$\langle \mathcal{M}, w_1, g(x_1/a_1)\rangle \models P(x_1)$, *car* $\begin{array}{lll} x_1^{w_1,g(x_1/a_1} & \in & I(w_1,P) \\ a_1 & \in & \{a_1,a_2\} \end{array}$

Pour 2), on a :

$\langle \mathcal{M}, w_1, g(x_1/a_2)\rangle \models P(x_1)$, *car* $\begin{array}{lll} x_1^{w_1,g(x_1/a_2} & \in & I(w_1,P) \\ a_2 & \in & \{a_1,a_2\} \end{array}$

Le statut de $\Box\exists x_1(x_1 = c)$

$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \exists x_1(x_1 = c) \iff$ il y a un individu a dans D tel que $\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a)\rangle \models (x_1 = c)$.

L'individu a que l'on cherche est a_1 :
$\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a_1)\rangle \models (x_1 = c)$, car $x_1^{w_0,g(x_1/a_1)} = I(w_0, c) = a_1$
$\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \exists x_1(x_1 = c)$ se démontre de façon analogue.

Ainsi, on a démontré que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Box\exists x_1(x_1 = c)$
$\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \Box\exists x_1(x_1 = c)$

En fait, il est facile de voir que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \exists x_1(x_1 = c)$ pour ***n'importe quelle assignation*** g dans $\mathcal{M}$. Soit g une assignation arbitraire dans $\mathcal{M}$, On a :
$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \exists x_1(x_1 = c) \iff$ il y a un individu a dans D tel que $\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a)\rangle \models x_1 = c$. On trouve toujours cet individu : c'est a_1.

Le statut de $\Box\forall x_1 P(x_1)$

Cependant, $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \Box\forall x_1 P(x_1)$ et $\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \not\models \Box\forall x_1 P(x_1)$.

On a $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Box\forall x_1 P(x_1) \iff \langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \Box\forall x_1 P(x_1)$: les conditions de validité des deux énoncés sont liées, il nous suffit donc de démontrer que l'un des deux n'est pas vérifié.

On étudie les conditions de validité de $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Box\forall x_1 P(x_1)$ et on montre qu'elles ne sont pas remplies :
$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Box\forall x_1 P(x_1) \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \forall x_1 P(x_1) \text{ et} \\ \langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \forall x_1 P(x_1) \end{array} \right.$

On a montré que $\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \models \forall x_1 P(x_1)$ plus haut, mais $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \forall x_1 P(x_1)$.

En fait : $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \forall x_1 P(x_1) \iff \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a_1)\rangle \models P(x_1) \text{ et} \\ \langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \models P(x_1) \end{array} \right.$
Mais il est facile de voir que $\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \not\models P(x_1)$.

Pour reprendre, puisque $\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/a_2)\rangle \not\models P(x_1)$, on a $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \forall x_1 P(x_1)$, et donc $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \Box\forall x_1 P(x_1)$ et $\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \not\models \Box\forall x_1 P(x_1)$.

3.2.2 Vérité relative à une assignation, à un modèle, validité

Maintenant qu'on a défini $\langle \mathcal{M}, w, g\rangle \models A$ pour w, g et A arbitraires, on va définir d'autres notions sémantiques. On fixe comme d'habitude $S = \langle W, D, w_0\rangle$, $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ et une assignation g dans $\mathcal{M}$.

1. On dit que la forumule A est vraie dans le modèle $\mathcal{M}$ relativement à l'assignation g, $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A$ si et seulement si $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash A$.
2. On dit que A est vraie dans $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \vDash A$, si et seulement si $\mathcal{M}, g \vDash A$ pour chaque assignation g dans $\mathcal{M}$.
3. On dit que A est vraie dans la structure S, $S \vDash A$ si et seulement si $\mathcal{M} \vDash A$ pour chaque structure $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ basée sur S.
4. On dit que A est valide dans la classe de structure K, $K \vDash A$ si et seulement si $S \vDash A$ pour chaque structure S dans K.

$\mathcal{M} \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$

On a vu en 3.2.1 que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$ et
$\langle \mathcal{M}, w_1, g\rangle \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$

Donc, par la clause 1) de la section précédente, on a : $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$ pour chaque assignation g dans $\mathcal{M}$ choisie comme dans l'exemple.
Donc, par la clause 2), $\mathcal{M} \vDash \Box\exists x_1(x_1 = c)$

$K \nvDash \Box\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$

Nous allons montrer que cette formule $\Box\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$ n'est pas valide dans la classe K de toutes les structures S. On va produire pour cela une structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$ telle que $S \nvDash \exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$.

Par définition, $S' \vDash \exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2) \iff$ pour chaque modèle $\mathcal{M} = \langle S', I\rangle$ basé sur S', on a : $\mathcal{M} \vDash \Box\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$.

On considère la structure S telle que $W = \{w_0\}$ et $D = \{a_1\}$, et on va s'assurer qu'elle ne vérifie pas cette formule. Pour cela, on doit trouver un modèle $\mathcal{M}$ basé sur S qui ne vérifie pas la nécessité qu'il y ait deux éléments qui soient différents. Le modèle que nous cherchons est tel que I ne compte pas : ce peut être n'importe quelle fonction de valuation, puisque nous n'avons pas besoin d'interprêter des constantes ou des prédicats.
On souhaite donc montrer que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \Box\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$ pour n'importe quelle assignation g. Comme w_0 est le seul monde dans W, on doit montrer que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$.

Par définition :
$\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash \exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2) \iff$ il y a un individu b_1 et un individu b_2 tels que : $\langle \mathcal{M}, w_0, g(x_1/b_1, x_2/b_2)\rangle \vDash \neg(x_1 = x_2)$
Mais cela est impossible dans notre structure, car elle ne compte qu'un seul élément, a_1.

Pour toute assignation g, on a donc $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash x_1 = x_2$: on a trouvé une modèle de la structure S qui ne vérifie pas $\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$, et donc la classe des structures ne vérifie pas $\Box\exists x_1\exists x_2\neg(x_1 = x_2)$
Autrement dit, toutes les structures ne vérifient pas le fait qu'elles comportent deux individus différents.

3.2.3 *De dicto, de re*

Grâce à la logique modale et à l'interprétation avec des univers communs [1], on peut faire une distinction entre $\Box\exists x(x = c)$ et $\exists x\Box x = c$.
La première est une modalité *de dicto* : il est *nécessaire* qu'il y ait quelqu'un qui soit c.
La seconde est une modalité *de re* : il y a quelqu'un qui est *nécessairement* c.

On voit désormais que la première est valide, tandis que la seconde ne l'est pas. En effet, il est facile de trouver une structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$ et un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ basé sur S tel que $M \nvDash \exists x\Box x = c$.
Soient $W = \{w_0, w_1\}$, $D = \{a_1, a_2\}$ et I une valuation qui interprète c dans w_0 par a_1 et dans w_1 par a_2. Formellement $I(w_0, c) = a_1$ et $I(w_1, c) = a_2$.
Maintenant on peut montrer que pour chaque assignation g dans $\mathcal{M}$ on a $\langle\mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \exists x\Box x = c$.
On le démontre par l'absurde : supposons que $\langle\mathcal{M}, w_0, g(x/a)\rangle \vDash \Box x = c$.

Dans ce cas on doit avoir $\langle\mathcal{M}, w_0, g(x/a)\rangle \vDash x = c$

et

$$\langle\mathcal{M}, w_1, g(x/a)\rangle \vDash x = c$$

Ce qui revient à dire que $x^{w_0,g(x/a)} = c^{w_0,g(x/a)}$

et

$$x^{w_1,g(x/a)} = c^{w_1,g(x/a)}$$

Mais cela est impossible, car on devrait avoir $a = I(w_0, c) = I(w_1, c)$, or on a fixé que $a_1 = I(w_0, c) \neq I(w_1, c) = a_2$.
Ainsi, on a exhibé un modèle qui ne vérifie pas $\exists x\Box x = c$, et cette formule n'est donc pas valide dans la classe des structures.

3.2.4 Valide dans une structure, valide dans une classe

Il importe de bien distinguer la notion de valide dans une structure, $S \vDash A$, et valide dans une classe, $K \vDash A$.

Supposons que $S = \langle W, D, w_0\rangle$, ou D est l'ensemble des individus du monde actuel, disons $D = \{a_1, ..., a_n\}$. Dans ce cas, il est facile de prouver que $S \vDash \exists x_1 ....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$.
Cette formule *dit* que le domaine comporte au moins n individus, ce qui est le cas de la structure que l'on a fixé. Pour n'importe quelle interprétation I, on va avoir $\langle S, I\rangle \vDash \Box\exists x_1 ....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$.
Pourtant, il est évident que $K \nvDash \exists x_1 ....\exists x_n(x_1 \neq x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} \neq x_n)$: il suffit de trouver une strucure S' dont le domaine D' ait une cardinalité inférieure à n.
La différence entre les deux notions correspond à la différence entre deux conceptions de vérité logique.

Exercice 25 *Trouvez S et $\mathcal{M}$ un modèle de S tels que* $\mathcal{M} \vDash \exists x_1\exists x_2(x_1 \neq x_2 \wedge \forall x_3\, x_3 = x_2 \vee x_3 = x_1)$.

Exercice 26 *Montrez que* $\vDash \forall x\, x = x$.

1. En fait, c'est grâce à l'interprétation des variables x par l'assignation g qui ne dépend pas des mondes possibles.

Chapitre 4

La définissabilité dans la logique modale

4.1 Réflexivité et schéma (T)

On a vu que le schéma (T) : $\Box A \rightarrow A$ est valide dans tous les modèles $\mathcal{M} =< W, R, V >$ où R est réflexive. Donc si la relation R dans $\mathcal{M}$ est réflexive, on a $\mathcal{M} \vDash B$ pour chaque instance B de (T) ($\mathcal{M} \vDash B \leftrightarrow \langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash B$ pour tout w dans W). Mais il ne s'ensuit pas que si un schéma (T) est vrai dans un modèle $\mathcal{M} =< W, R, V >$, alors la relation R est réflexive, et en voici un contre exemple :

Contre-Exemple 27 *$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ avec $W = \{1, 2\}$, $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$, et $V(p_i) = W$ où $V(p_i) = \emptyset$ pour $i = 1, 2, 3 \cdots$.*

$$2 \quad \bullet\!\longleftrightarrow\!\bullet \quad 1$$

On peut facilement montrer par induction que pour chaque A on a

$$\langle \mathcal{M}, 1 \rangle \vDash A \leftrightarrow \langle \mathcal{M}, 2 \rangle \vDash A \qquad (+)$$

Étant donné que

$$\langle \mathcal{M}, 1 \rangle \vDash \Box A \leftrightarrow \langle \mathcal{M}, 2 \rangle \vDash A$$

Et

$$\langle \mathcal{M}, 2 \rangle \vDash \Box A \leftrightarrow \langle \mathcal{M}, 1 \rangle \vDash A$$

Il s'ensuit que $\mathcal{M} \vDash \Box A \rightarrow A$:

Supposons $\langle \mathcal{M}, 1 \rangle \vDash \Box A$, alors $\langle \mathcal{M}, 2 \rangle \vDash A$, et par $(+)$ on a $\langle \mathcal{M}, 1 \rangle \vDash A$.

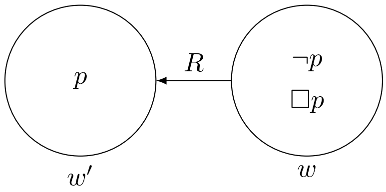
$\langle \mathcal{M}, 2 \rangle \vDash \Box A \rightarrow A$ se démontre de la même façon.

Le modèle construit vérifie donc toutes les instances du schéma (T), mais R n'est pas réflexive : $\langle 1, 1 \rangle \notin R$ et $\langle 2, 2 \rangle \notin R$.

Dans cet exemple, la fonction de valuation V est telle que le schéma (T) est valide, mais si on change V, par exemple en posant $V'(p) = \{2\}$, alors l'instance $\Box p \rightarrow p$ n'est plus valide. Chaque fois que la relation R n'est pas réflexive, il y a une valuation V qui falsifie une instance de (T) dans le modèle $\langle W, R, V \rangle$.

Théorème 28 *$\langle W, R \rangle \vDash \Box A \rightarrow A \leftrightarrow R$ est réflexive.*

Démonstration 29 *Supposons que dans le cadre $\langle W, R\rangle$ la relation R ne soit pas réflexive. Il y a alors un monde $w \in W$ tel que $\neg R(w,w)$. Soit V une valuation telle que $V(p) = W - \{w\}$ et $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un modèle. S'il y a un monde tel que $R(w,w')$, alors $w \neq w'$. On a : $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Box p$ car p est vrai dans tous les mondes w' tels que $R(w,w')$, mais $\langle \mathcal{M}, w\rangle \not\models p$. Donc $\Box p \to p$ n'est pas valide dans $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \not\models \Box p \to p$.*



On a établi les résultats suivants :
- *Si dans le cadre $\langle W, R\rangle$, R est réflexive, alors $\langle W, R\rangle \models \Box A \to A$, c'est-à-dire $\langle W, R, V\rangle \models \Box A \to A$ pour toute valuation V.*
- *Si dans le cadre $\langle W, R\rangle$ R n'est pas réflexive alors $\langle W, R\rangle \not\models \Box A \to A$, car il existe toujours une valuation V telle que $\langle W, R, V\rangle \not\models \Box A \to A$.*

Ainsi, on dit que la formule $\Box A \to A$ définit la propriété de reflexivité d'une cadre. La situation est analogue à celle de la logique du premier ordre : soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre qui contient un symbole de prédicat P qui est interprété dans un modèle du premier ordre $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ par $I(P)$, une relation dans D. Dans tous les modèles $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ où $\forall x P(x,x)$ est vrai, $I(P)$ est clairement réflexive [1]. Encore une fois, la formule $\forall x P(x,x)$ définit la réflexivité dans la logique du premier ordre. Cela veut dire que dans tous les modèles $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$ on a : $\mathcal{M} \models \forall x P(x,x) \leftrightarrow I(P)$ est réflexive.

4.2 D'autres résultats de définissabilité

Dans la logique du premier ordre la transitivité d'une relation est définie par la formule

$$\forall x \forall y \forall z [P(x,y) \wedge P(y,z)] \to P(x,z)$$

la symétrie par

$$\forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$$

et l'euclidicité par

$$\forall x \forall y \forall z [P(x,y) \wedge P(x,z)] \to P(y,z)$$

On a des résultats analogues dans la logique modale : soit $\langle W, R\rangle$ un cadre arbitraire. On a :
- $\langle W, R\rangle \models \Box A \to \Box\Box A \iff R$ est transitive.
- $\langle W, R\rangle \models A \to \Box\Diamond A \iff R$ est symétrique.
- $\langle W, R\rangle \models \Diamond A \to \Box\Diamond A \iff R$ est euclidienne.

1. Une relation R dans D est réflexive $\leftrightarrow \forall a \in DR(a,a)$

4.2.1 La transitivité

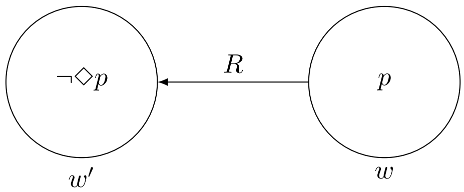
$\langle W, R\rangle \vDash \Box A \to \Box\Box A \to R$ **est transitive.**

R **est transitive** $\to \langle W, R\rangle \vDash \Box A \to \Box\Box A$ **.**

4.2.2 La symétrie

$\langle W, R\rangle \vDash A \to \Box\Diamond A \to R$ **est symétrique.**

Supposons que R n'est pas symétrique : il y a alors un w et un w' tels que $R(w, w')$ mais $\neg R(w', w)$. Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ tel que $V(p) = \{w\}$. Donc $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p$. Puisqu'il n'y a pas de monde w'' tel que $R(w', w'')$ et $\langle \mathcal{M}, w''\rangle \vDash p$, on a $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \nvDash \Diamond p$.



Puisque $R(w, w')$, alors $\langle \mathcal{M}, w\rangle \nvDash \Box\Diamond p$, et on a montré que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \nvDash p \to \Box\Diamond p$, donc $\mathcal{M} \nvDash p \to \Box\Diamond p$, donc $\langle \mathcal{M}, R\rangle \nvDash p \to \Box\Diamond p$.

R **est symétrique** $\to \langle W, R\rangle \vDash A \to \Box\Diamond A$**.**

Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ un modèle quelconque et w_0 un monde quelconque de ce modèle (un tel monde existe toujours puisque $W \neq \emptyset$).

Si w_0 n'est en relation avec aucun monde, alors par défaut de monde en relation avec w_0, toute formule du type $\Box A$ est vraie, donc le schéma est rendu vrai.

Si w_0 est en relation avec au moins un monde, deux cas se posent :

– Si w_0 est en relation uniquement avec lui-même, alors $A \to \Box\Diamond A$ est satisfait : si w_0 rend vrai A, alors tous les mondes en relation avec w_0 (autrement dit w_0 lui-même) rendent vrai le fait qu'il soit possible que $\Diamond A$.
– Si w_0 n'est en relation qu'avec d'autres mondes, alors ces relations sont réflexives. Si w_0 vérifie A, tous les mondes en relation avec w_0 vérifient $\Diamond A$, car ils sont en relation avec un monde qui vérifie A.

Puisque tout monde, qu'il soit en relation avec d'autres mondes ou pas, de ce modèle rend vrai toutes les instances de $A \to \Box\Diamond A$, ce schéma est validé par ce modèle.

4.2.3 L'euclidianité

$\langle W, R\rangle \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A \to R$ **est euclidienne.**

R **est euclidienne** $\to \langle W, R\rangle \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$**.**

Chapitre 5

Correspondance

Fixons un langage modal $\mathcal{L}$ dont les atomes (symboles propositionnels) sont $p_1, ..., p_k$. Il y a une traduction qui associe à chaque formule A du langage $\mathcal{L}$ une formule $St_x(A)$ d'un langage du premier ordre (dans une seule variable libre x) dont les seuls symboles non-logiques sont $\underline{\underline{R}}, P_1, ..., P_k$, où

– $\underline{\underline{R}}$ est un symbole de relation à deux place

– $\overline{\overline{P}}_1, ..., P_k$ sont des symboles de relation à une place.

On suppose ici que $\mathcal{L}$ contient seulement les connecteurs modaux $\Box$ et $\Diamond$.

Définition 30 *On définit la traduction par récurrence :*

$St_x(p_i) = P_i(x)$

$St_x(\neg p_i) = \neg P_i(x)$

$St_x(A \wedge B) = St_x(A) \wedge St_x(B)$

$St_x(A \vee B) = St_x(A) \vee St_x(B)$

$St_x(\Diamond A) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(A))$

$St_x(\Box A) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \rightarrow St_y(A))$

Remarque 31 *On observe que $St_x(A)$ est la traduction dans la variable x ; $St_y(A)$ est la traduction dans la variable y.*

Exemple 32 **a)** $St_x(\Diamond p_1) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge P_1(y))$

b) $St_x(\Box p_1) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \rightarrow P_1(y))$

c) $St_x(\Box\Box p_2) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \rightarrow St_y(\Box p_2))$

Mais $St_y(\Box p_2) = \forall z(\underline{\underline{R}}(y, z) \rightarrow P_2(z))$

Donc$St_x(\Box\Box p_2) = \forall y(\underline{\underline{R}}(x, y) \rightarrow \forall z(\underline{\underline{R}}(y, z) \rightarrow P_2(z)))$

Définition 33 (L'association du modèle de $\mathcal{L}$ avec un modèle de $\mathcal{L}^{FO}$) *A chaque modèle $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ pour le langage $\mathcal{L}$ on associe un modèle $\mathcal{M}^{\text{FO}} = \langle D, I\rangle$ du langage du premier ordre $\mathcal{L}^{FO} = \{\underline{\underline{R}}, P_1, ..., P_k\}$ de la façon suivante :*

– *D est W*

– $I(\underline{\underline{R}}) = R$

– $I(\overline{\overline{P}}_i) = V(p_i)$

Exemple 34 *Soient $\mathcal{L} = \{p_1, p_2\}$ et $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ où*

$W = \{w_1, w_2\}$
$R = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}$
$V(p_1) = \{w_1\}, V(p_2) = \{w_2\}$

Le modèle associé en langage du premier ordre est alors $\mathcal{M}^{\mathrm{FO}} = \langle D, I\rangle$ *où*

$D = W$
$I(\underline{\underline{R}}) = R$
$I(P_1) = \{w_1\}, I(P_2) = \{w_2\}$

Proposition 35 *Pour chaque formule A du langage modal $\mathcal{L}$, chaque modèle $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ et chaque monde $w \in W$, on a :*

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \models A \iff \text{Pour chaque assignation } g \text{ telle que } g(x) = w \text{ on a : } \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models St_x(A)$$

Démonstration 36 *Par induction sur A :*

Si A est atomique *, c'est-à-dire que A est p_i. On doit montrer que*

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \models p_i \iff \text{Pour chaque assignation } g \text{ telle que } g(x) = w, \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models P_i(x)$$

– *Supposons que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models p_i$. Donc $w \in V(p_i)$. On a $\mathcal{M}^{\mathrm{FO}} = \langle D, I\rangle$ avec $D = W$ et I définie comme auparavant.*
Comme $w \in V(p_i)$, par définition, $w \in I(P_i)$. Soit g une assignation telle que $g(x) = w$. On a évidemment $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models P_i(x)$ car
$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models P_i(x) &\iff x^{\mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g} \in I(P_i)\\ &\iff w \in V(p_i)\end{aligned}$$
Et on a déjà vu que $w \in V(p_i)$.
– *Pour l'autre direction, on suppose que $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models P_i(x)$ pour chaque assignation g telle que $g(x) = w$. Donc $w \in I(P_i)$. Mais $I(P_i) = V(p_i)$, donc $w \in V(p_i)$, ce qui veut dire que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models p_i$.*

Si A est $\Diamond B$ *, $St_x(p_i) = \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B))$. On doit montrer que*

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B \iff \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B)) \text{ pour chaque } g \text{ telle que } g(x) = w.$$

L'hypothèse d'induction est

a) $\langle \mathcal{M}, v\rangle \models C \iff \langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, h\rangle \models St_y(B)$ *pour chaque v, formule C moins complexe que $\Diamond B$ et assignation h telle que $h(y) = v$.*
Supposons que

b) $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B$
Donc

c) $\langle \mathcal{M}, v\rangle \models B$ *pour quelque v tel que $R(w, v)$.*
Soit g une assignation telle que $g(x) = w$. On doit montrer que

d) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B))$.
Pour montrer ce point, il faut trouver $t \in W$ tel que

e) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/t)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B)$
En fait le t que nous cherchons est v. Il suffit de montrer que

f) $\langle \mathcal{M}^{\mathrm{FO}}, g(y/v)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x, y) \wedge St_y(B)$

Pour cela, il faut montrer que

1. $\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x, y)$
   et
2. $\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$

– *Pour montrer 1., nous observons que*
$$\begin{aligned}\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)\rangle \models \underline{\underline{R}}(x, y) &\iff \langle x^{\mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)}, y^{\mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)}\rangle \in I(\underline{\underline{R}})\\ &\iff \langle w, v\rangle \in I(\underline{\underline{R}})\\ &\iff R(w, v)\end{aligned}$$
Par c), on a $R(w, v)$, donc 1. est démontré.

– *Pour montrer 2., on observe que $g(y/v)$ est une assignation telle que $g(y/v)(y) = v$. Donc par l'hypothèse d'induction on a*
$$\langle \mathcal{M}, v\rangle \models B \iff \langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$$
Par c), $\langle \mathcal{M}, v\rangle \models B$, donc $\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g(y/v)\rangle \models St_y(B)$

Exercice 37 *On vient de démontrer que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B$ impliquait $\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \land St_y(B))$ pour chaque g telle que $g(x) = w$. A vous de démontrer l'autre sens, c'est-à-dire de supposer que $\langle \mathcal{M}^{\text{FO}}, g\rangle \models \exists y(\underline{\underline{R}}(x, y) \land St_y(B))$ pour chaque g telle que $g(x) = w$ et d'obtenir que $\langle \mathcal{M}, w\rangle \models \Diamond B$.*

Chapitre 6

Trouver un contre-modèle

Afin de montrer qu'une formule A n'est pas valide dans une classe de structures en S5, il faut trouver un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ avec $S = \langle W, D, w_0\rangle$ et I en les définissant correctement :
$I(w, c) \in D$ pour chaque monde w et chaque constante individuelle c.
$I(w, P) \subseteq D^n$ pour chaque monde w et chaque symbole de prédicat P d'arité n.
et une assignation g
De sorte que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models A$.

6.1 $\not\models [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Nous allons trouver $\mathcal{M}, w_0$ et g tels que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$, c'est-à-dire :

1. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$
2. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

6.1.1 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$

Pour montrer 1., il faut montrer que

a) $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond F(a)$

b) $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond G(a)$

Pour a), il suffit de trouver un monde v_0 tel que : a*) $\langle \mathcal{M}, v_0, g\rangle \models F(a)$
Pour b), il suffit de trouver un monde v_1 tel que : b*) $\langle \mathcal{M}, v_1, g\rangle \models G(a)$

Nous commençons à construire notre structure $S = \langle W, D, w_0\rangle$:
- W doit contenir au moins trois mondes : w_0, v_0, v_1.
- D doit contenir au moins deux individus, n et m.
- n va servir de dénotation pour la constante a dans v_0.
- m va servir de dénotation pour la constante a dans v_1.
- On a donc : $I(v_0, a) = n$ et $I(v_1, a) = m$.

Afin que a*) et b*) soient le cas, il faut que n appartienne à la dénotation de F dans v_0, et que m appartienne à l'interprétation de G dans v_1 : $I(v_0, F) = \{n\}$ $\quad I(v_1, G) = \{m\}$

6.1.2 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Pour montrer 2., il faut montrer que dans chaque monde t de W, on a :

$$\langle W, t, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$$

Comme W contient trois mondes, on doit montrer que :
- i) $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$
- ii) $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$
- iii) $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash F(a) \wedge G(a)$

Pour i), il faut montrer (ia) $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, w_0, g\rangle \nvDash G(a)$
Pour ii), il faut montrer (iia) $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, v_0, g\rangle \nvDash G(a)$
Pour iii), il faut montrer (iiia) $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash F(a)$ ou $\langle W, v_1, g\rangle \nvDash G(a)$

Pour (ia), il suffit de mettre $I(w_0, F) = \emptyset$
Pour (iia), il suffit de mettre $I(v_0, G) = \emptyset$. (On a déjà $I(v_0, F) = \{n\}$)
Pour (iiia), il suffit de mettre $I(v_1, F) = \emptyset$. (On a déjà $I(v_1, G) = \{m\}$).

6.1.3 Pour résumer

Le langage $\mathcal{L}$ contient trois constantes non-logiques : $a^{\langle 0\rangle}$, $F^{\langle 1\rangle}$, $G^{\langle 1\rangle}$.
Le modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ est tel que $S = \langle W, D, w_0\rangle$ avec $W = \{w_0, v_1, v_2\}$ et $D = \{n, m\}$.
$I(w_0, a) = n$ *On pourrait très bien avoir $I(w_0, a) = m$.*
$I(w_0, F) = \emptyset$, $I(v_0, G) = \emptyset$, $I(v_1, F) = \emptyset$
Les autres valeurs $I(v_0, a)$, $I(v_1, a)$, $I(w_0, G)$, $I(v_0, F)$, $I(v_1, G)$, ainsi que les valeurs de g peuvent être choisies indifférement.
On a avec un modèle ainsi construit :
- $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash \Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)$
- $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \Diamond(F(a) \wedge G(a))$

Donc $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$
Et puisqu'il existe un contre-modèle à cette formule A, elle n'est pas vraie dans la classe de tous les modèles :

$$\nvDash [\Diamond F(a) \wedge \Diamond G(a)] \rightarrow \Diamond(F(a) \wedge G(a))$$

6.2 $\nvDash \Box\exists x F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$

Nous allons produire un contre-modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ pour cette formule. Il faut montrer que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \Box\exists x F(x) \rightarrow \exists x \Box F(x)$, ce qui revient à montrer que :

1. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x F(x)$
2. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \nvDash \exists x \Box F(x)$

6.2.1 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \vDash \Box\exists x F(x)$

1. dit que la dénotation de F doit être non-vide dans chaque monde v de W, y compris le monde actuel w_0.
Nous allons stipuler :

$$W = \{w_0, v_1\}$$
$$I(w_0, F) \neq \emptyset,\ I(v_1, F) \neq \emptyset$$

6.2.2 $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \exists x \Box F(x)$

2. dit qu'il n'y a pas d'individu a dans D de façon que
$\langle \mathcal{M}, w_0, g(x/a)\rangle \models \Box F(x)$ +
En d'autres termes, pour chaque individu a on a :
$\langle \mathcal{M}, w_0, g(x/a)\rangle \not\models \Box F(x)$ ++
Ce qui revient à dire que pour chaque individu a il y a un monde v tel que

$$a \notin I(v, F)$$

6.2.3 Construction du modèle

On construit notre modèle de cette façon : $\begin{array}{ll} W = \{w_0, v_1\} & D = \{n, m\} \\ I(w_0, F) = \{n\} & I(v_1, F) = \{m\} \end{array}$
On observe que n n'appartient pas à $I(v_1, F)$, et m n'appartient pas à $I(w_0, F)$.
Les autres valeurs ne comptent pas.

6.3 $\models \Diamond\exists x(x = a \wedge \Box F(x)) \to F(a)$

Montrons que cette formule est vraie dans chaque modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ où I est constante, c'est-à-dire que pour tous les mondes v, w dans W, on a :

$$I(v, a) = I(w, a) \qquad (+)$$

En d'autres termes, on a un désignateur rigide : la valeur de a est fixée pour tous les mondes de W.

6.3.1 Démonstration par l'absurde

Supposons qu'on ait un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I\rangle$ qui satisfait (+) et tel que $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models \Diamond\exists x(x = a \wedge \Box F(x)) \to F(a)$.
Donc

1. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \models \Diamond\exists x(x = a \wedge \Box F(x))$
   et
2. $\langle \mathcal{M}, w_0, g\rangle \not\models F(a)$
   Par 1., il y a un monde v tel que
3. $\langle \mathcal{M}, v, g\rangle \models \exists x(x = a \wedge \Box F(x))$
   Soit m un individu dans D tel que
4. $\langle \mathcal{M}, v, g(x/m)\rangle \models (x = a \wedge \Box F(x))$
   Donc :
5. $m = I(v, a)$
   et
6. $m \in I(t, F)$ pour chaque t dans W.

En particulier :

$$M \in I(w_0, F)$$

Par 2., on a :

$$I(w_0, a) \notin I(w_0, F)$$

Mais $I(w_0, a) = I(v, a)$, par 5. et le fait que a est un désignateur rigide. Donc $m \in I(w_0, F)$ et $m \notin I(w_0, F)$, ce qui est une contradiction.

6.4 Les formules de Barcan

6.4.1 $\models \forall x \Box F(x) \to \Box \forall x F(x)$

Supposons par l'absurde qu'il y a un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

1. $\langle \mathcal{M}, w_0, g \rangle \models \forall x \Box F(x)$
2. $\langle \mathcal{M}, w_0, g \rangle \not\models \Box \forall x F(x)$
   Par 1., tout individu m dans D est tel que
3. $m \in I(v, F)$ pour chaque v dans W.

Mais par 2., il y a un t dans W et un individu m dans D tel que :

$$m \notin I(t, F)$$

Mais cela contredit 3.
La validité de la formule de Barcan est contre-intuitive. Cette formule dit que si chaque individu qui actuellement existe a la proprité F dans chaque monde possible, alors dans chaque monde possible, chaque individu dans ce monde-là a la propriété F.
La validité de la formule de Barcan dans notre modèle provient du fait que tous les mondes ont le même univers. S'il y avait plus d'individus dans les autres mondes que dans le monde actuel, alors $\forall x \Box F(x) \to \Box \forall x F(x)$ ne serait pas valide.

6.4.2 $\models \forall x \Box \exists y \; y = x$

L'hypothèse d'un seul univers commun à tous les mondes de W rend aussi vraie cette formule. Cette formule dit que chaque individu existe nécessairement.
Supposons, par l'absurde, qu'il y a un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

$$\langle \mathcal{M}, w_0, g \rangle \not\models \forall x \exists y \; y = x$$

Donc il y a un individu m dans D tel que

$$\langle \mathcal{M}, v, g(x/m) \rangle \not\models \exists y \; y = x$$

Ce qui revient à dire que

$$\langle \mathcal{M}, v, g(x/m) \rangle \models \forall y \; y \neq x$$

Mais cela est impossible !

6.5 $\models \exists x \Box A \to \Box \exists x A$

Cette formule est valide, et on le prouve par l'absurde.
Supposons qu'il existe un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ et une assignation g tels que

1. $\langle \mathcal{M}, w_0, g \rangle \models \exists x \Box A$
2. $\langle \mathcal{M}, w_0, g \rangle \not\models \Box \exists x A$

1. est le cas si et seulement si il existe un $a \in D$ tel que

$$\langle \mathcal{M}, w_0, g(x/a) \rangle \models \Box A$$

C'est-à-dire que dans tout monde $v \in W$, $\langle \mathcal{M}, v, g(x/a) \rangle \models A$ (+)

2. est le cas si et seulement si il existe un monde $v_1 \in W$ tel que

$$\langle \mathcal{M}, v_1, g \rangle \not\models \exists x A$$

C'est-à-dire si qu'il n'existe pas de $m \in D$ tel que $\langle \mathcal{M}, v_1, g(x/m) \rangle \models A$ (++)
Or (+) et (++) se contredisent, puisque a rend vrai A dans tout monde de W.

6.5.1 Portée philosophique

La démonstration n'empêche pas les objections philosophiques : supposons que les objets physiques soient nécessairement physiques. Dans ce cas, $\exists x \Box P(x)$ semble vrai quand on prend P comme *être physique*. Mais dans ce cas, $\Box \exists x P(x)$ doit être vrai, et cela rend impossible l'existence de mondes où aucun objet n'est physique. Pour bloquer la validité de cette formule, il suffit qu'il y ait des mondes qui contiennent moins d'objets que le monde actuel.
En 6.4, on a vu que pour bloquer la validité des forumes de Barcan, on a besoin de mondes qui contiennent plus d'individus que le monde actuel.
Cela nous suggère qu'il existe des modèles de Kripke à univers variables.

6.5.2 Modèle à univers variables

On définit un système de la forme

$$S = \langle W, D, E, w_0 \rangle$$

Avec :

- W est un ensemble de mondes possibles
- D est un super-univers
- E est une fonction qui associe à chaque monde v dans W un univers $E(v) \subseteq D$.
- w_0 est le monde actuel.

Intuitivement, $E(v)$ est l'ensemble des individus qui existent dans v.
La définition d'un modèle $\mathcal{M} = \langle S, I \rangle$ reste la même qu'auparavant. On définit

$$\langle \mathcal{M}, w, g \rangle \models A$$

de la même façon qu'auparavant, sauf pour la clause

$$\langle \mathcal{M}, w, g \rangle \models \forall x A \iff \text{pour chaque } a \text{ dans } E(w) : \langle \mathcal{M}, w, g(x/a) \rangle \models A$$

Avec cette nouvelle sémantique, on trouve des contre-modèles pour les formules

- $\forall x \Box F(x) \to \Box \forall x\, F(x)$
- $\exists x \Box F(x) \to \Box \exists x\, F(x)$
- Etc.

Chapitre 7

Complétudes

7.1 La logique propositionnelle

7.1.1 Définition d'ensemble maximal consistant

Convention 38 *$\perp$ abbrège $\neg(p \to p)$, c'est le symbole de l'absurde, de ce qui est toujours faux.*

Définition 39 *Soit Γ un ensemble de formules.*

Γ *<u>est inconsistant</u>*	$\iff$	$\Gamma \vdash_{\mathsf{PL}} \perp$
Γ *<u>est consistant</u>*	$\iff$	$\Gamma \nvdash_{\mathsf{PL}} \perp$
Γ *<u>est maximal</u>*	$\iff$	*pour chaque formule A du langage : $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$*

On rappelle que $\Gamma \vdash_{\mathsf{PL}} A$ veut dire, par définition, qu'il y a une liste <u>finie</u> $A_1, A_2, ..., A_n$ de formules telle que $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash_{\mathsf{PL}} A$. C'est-à-dire qu'il existe une dérivation en logique propositionnelle[1]*de A sous les hypothèses $A_1, A_2, ..., A_n$.*

Fait 40 *S'il y a une formule A telle que $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash \neg A$, alors Γ est inconsistante.*

Théorème 41 *Soit Δ un ensemble consistant de formules. Il y a un ensemble Γ de formules telle que :*

1. *Γ est maximal*
2. *Γ est consistant*
3. *$\Delta \subseteq \Gamma$*

Démonstration 42 *La stratégie de la preuve est la suivante :*

- *Nous allons mettre toutes les formules de Δ dans Γ.*
- *Ensuite nous allons faire une liste infinie de toutes les formules du langage : $A_1, A_2, ...$.*
- *Pour chacune des formules de la liste, nous allons inclure dans Γ soit cette formule, soit sa négation, selon la consistance de Γ.*

***Dans le détail** :*
On liste d'abord toutes les formules du langage : $A_1, A_2, ...$.
On forme ensuite une séquence infinie $\Gamma_0, \Gamma_1, ...$, ou chaque Γ_i est un ensemble de formules défini par récurrence :

1. Etant donné que nous n'évoquerons que la logique propositionnelle dans cette section, on omettra l'indice PL de $\vdash_{\mathsf{PL}}$ desormais.

- $\Gamma_0 = \Delta$
- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\} & \textit{si cet ensemble est consistant} \\ \Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\} & \textit{sinon.} \end{cases}$

Maintenant nous allons démontrer par récurrence que chaque Γ_i obtenu de cette façon est consistant :

- *Γ_0 est consistant par hypothèse, car $\Gamma_0 = \Delta$ et Δ est consistant.*
- *On suppose Γ_n consistant, on doit montrer que Γ_{n+1} l'est également. On a deux façons de construire Γ_{n+1} :*
  1. *$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$*
  2. *$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\}$ si $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ est inconsistant.*

  Dans le cas 1., la preuve est immédiate : Γ_{n+1} est consistant.
  Le cas 2. nécessite une réduction à l'absurde : supposons que Γ_{n+1} n'est pas consistant, c'est-à-dire $\Gamma_n \cup \{\neg A_{n+1}\} \vdash \bot$.
  Par définition, il y a des formules $A_1, A_2, ...$ telles que $\{A_1, A_2, ..., A_n, \neg A_{n+1}\} \vdash \bot$[2].
  Par le théorème de déduction : $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \vdash \neg A_{n+1} \to \bot$.
  Comme $\Gamma_n \cup \{A_{n+1}\}$ est inconsistant, on montre par un raisonnement similaire sur $\{B_1, ..., B_n\} \subseteq \Gamma_n$ que $\{B_1, ..., B_n\} \vdash A_{n+1} \to \bot$.
  On a donc :

$$\frac{A_1, ..., A_n \ \vdash \ \neg A_{n+1} \to \bot \qquad B_1, ..., B_n \ \vdash \ A_{n+1} \to \bot}{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \ \vdash \ \bot}$$

  On obtient cette dérivation en utilisant le fait que pour toute formule, y compris A_{n+1}, on a le tiers exclu : $\vdash A_{n+1} \vee \neg A_{n+1}$. Or ici, que l'on ait A_{n+1} ou $\neg A_{n+1}$, Γ_n nous permets de dériver l'absurde. Puisque $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \subseteq \Gamma_n$ et $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \vdash \bot$, on a $\Gamma_n \vdash \bot$, c'est-à-dire que Γ_n est inconsistant, ce qui contredit notre hypothèse.

On vient de montrer que chaque membre de Γ_i de la séquence $\Gamma_0, \Gamma_1, ...$ est consistant.
On définit Γ comme l'union de tous les Γ_i : $\Gamma = \{A : A \in \Gamma_i \text{ pour } i \in \mathbb{N}\}$.
Maintenant :

1. *$\Delta \subseteq \Gamma$ est évident.*
2. *Γ est consistant. Supposons, par l'absurde, que $\Gamma \vdash \bot$. Par définition, il y a $A_1, ..., A_n$ dans Γ tels que $\{A_1, ..., A_n\} \vdash \bot$.*
   Soit $\Gamma_{A_1}, ..., \Gamma_{A_n}$ les ensembles de formules auxquels $A_1, ..., A_n$ appartiennent respectivement. Donc il existe Γ_j tel que $\Gamma_{A_1}, ..., \Gamma_{A_n} \subseteq \Gamma_j$. Donc $\Gamma_j \vdash \bot$, une contradiction.
3. *Il est évident que Γ est maximal, car pour chaque formule A du langage, $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$*

Γ est donc la collection maximalement consistante associée à Δ.

Lemme 43 *Soit Γ un ensemble de formules maximalement consistant.*

1. *Pour chaque formule A du langage, on a $A \in \Gamma$ ou $\neg A \in \Gamma$, mais en aucun cas les deux.*
2. *$(A \to B) \in \Gamma$ si et seulement si $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$.*

Démonstration 44 – *1. est vrai de façon évidente par le théorème 41.*

2. La présence de $\neg A_{n+1}$ est ici nécessaire, car on sait par hypothèse que $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ est consistant, car $\{A_1, A_2, ..., A_n\} = \Gamma_n$.

– *Pour 2., on prouve d'abord que*
•$(A \to B) \in \Gamma$ *implique que* $A \notin \Gamma$ *ou* $B \in \Gamma$. *Supposons que* $(A \to B) \in \Gamma$, *et que* $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$. *On a donc :*

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\to \acute{e}lim)$$

Or puisque $B \notin \Gamma$, *par la maximalité de* Γ, $\neg B \in \Gamma$. *Or on vient de montrer que* $\Gamma \vdash B$, *on établit ici que* $\Gamma \vdash \neg B$, *donc* $\Gamma \vdash \bot$, *ce qui est une contradiction.*
•*Ensuite on montre que* $A \notin \Gamma$ *ou* $B \in \Gamma$ *implique* $(A \to B) \in \Gamma$. *Supposons que* $A \notin \Gamma$ *ou* $B \in \Gamma$, *mais* $(A \to B) \notin \Gamma$. *Par la maximalité de* Γ, $\neg(A \to B) \notin \Gamma$. *En logique propositionnelle, il est facile de montrer que si on a* $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$, *on a aussi* $\Gamma \vdash A$ *et* $\Gamma \vdash \neg B$. *Or on a supposé que* $A \notin \Gamma$ *ou* $B \in \Gamma$. *Si* $B \in \Gamma$, *on a* $\Gamma \vdash B$, *donc* $\Gamma \vdash \bot$, *une contradiction. Si* $A \notin \Gamma$, *par maximalité de* Γ, $\neg A \in \Gamma$. *Donc* $\Gamma \vdash \neg A$, *ce qui, avec* $\Gamma \vdash A$, *donne* $\Gamma \vdash \bot$, *une contradiction.*

7.1.2 La complétude de la logique propositionnelle.

Théorème 45 *Si* $\models A$, *alors* $\vdash A$.

Pour montrer cela, on a besoin du

Lemme 46 *Si* $\nvdash A$, *alors* $\{\neg A\}$ *est consistante.*

Démonstration 47 *Supposons* $\nvdash A$ *et* $\{\neg A\}$ *est inconsistant. Formellement :* $\{\neg A\} \vdash \bot$. *Par le théorème de déduction,* $\vdash \neg A \to \bot$, *c'est-à-dire* $\vdash \neg A \to \neg(p \to p)$. *Cela est équivalent à* $\vdash (p \to p) \to A$, *et comme on a* $\vdash p \to p$, *on a* $\vdash A$, *ce qui contredit* $\nvdash A$.

Démonstration 48 (La preuve de la complétude) *On la démontre en prouvant sa contraposée, qui est*

Si $\nvdash A$, *alors* $\not\models A$.

On suppose que $\nvdash A$ *et on construit une interprétation qui assigne à* A *la valeur* F *(Faux).*
Comme $\{\neg A\}$ *est consistante (voir 46), le théorème précédent (voir 41) dit qu'il y a un ensemble* Γ *tel que*

1. Γ *est maximal*
2. Γ *est consistant*
3. $\{\neg A\} \subseteq \Gamma$

On construit maintenant l'interprétation suivante :
Pour chaque atome (symbole propositionnel atomique) du langage, p, *on stipule :*

$$V(p) = T^{3} \iff p \in \Gamma$$

On montre que pour chaque formule A *du langage :*
$V(A) = T \iff A \in \Gamma$ *(+)*
Comme $\neg A \in \Gamma$, *il suit que* $V(\neg A) = T$, *et donc* $V(A) = F$, *ce qui prouve le théorème de complétude.*

Démonstration 49 (+) *On montre (+) par induction sur la complexité des formules.*

---

3. T signifie *True*, c'est-à-dire *Vrai*. Autrement dit, la valeur de vérité de p est ici *Vrai*.

- *Si A est un énoncé atomique, c'est-à-dire de compléxité minimale, (+) est le cas par définition de V.*
- *Supposons que B vérifie $V(B) = T \iff B \in \Gamma$. Il nous faut démontrer que (+) est le cas pour toute sur-formule A de B. On doit traiter ce problème par cas :*

  1. *Si $A =: \neg B$, alors :*
  $$\begin{aligned} V(\neg B) = T &\iff V(B) = F \\ &\iff B \notin \Gamma \\ &\iff \neg B \in \Gamma \end{aligned}$$
  2. *Si $A =: B \wedge C$, alors :*
  $$\begin{aligned} V(B \wedge C) = T &\iff V[\neg(B \wedge C)] = F \\ &\iff [\neg(B \wedge C)] \notin \Gamma \\ &\iff (B \wedge C) \in \Gamma \end{aligned}$$
  3. *Si $A =: B \rightarrow C$, alors :*
  $$\begin{aligned} V(B \rightarrow C) = T &\iff V[\neg(B \rightarrow C)] = F \\ &\iff [\neg(B \rightarrow C)] \notin \Gamma \\ &\iff (B \rightarrow C) \in \Gamma \end{aligned}$$
  4. *Si $A =: B \vee C$, alors :*
  $$\begin{aligned} V(B \vee C) = T &\iff V[\neg(B \vee C)] = F \\ &\iff [\neg(B \vee C)] \notin \Gamma \\ &\iff (B \vee C) \in \Gamma \end{aligned}$$

  Puisqu'une formule, en logique propositionnelle, ne peut avoir pour connecteur principal que $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$,$\wedge$, toute surformule de B vérifie (+), et par induction, toute formule du langage vérifie (+).

7.2 La complétude de la logique modale

Soit Σ un système modal. On va construire un *modèle canonique* M_Σ tel que :

Si A est valide dans M_Σ, $M_\Sigma \models A$, alors A est un théorème de Σ, $\vdash_\Sigma A$. (*)

On va ensuite employer (*) pour donner une preuve de complétude de la façon suivante :

Pour K , supposons que le modèle canonique de K, M_K soit un modèle de Kripke.
Soit A une formule modale qui est vraie dans tous les modèles de Kripke. Alors A est valide dans le modèle canonique M_K. Donc, par (*), A est un théorème de K.

Pour T Supposons qu'on puisse montrer que le modèle canonique associé au système T, M_T, est tel que la relation d'accessibilité est réflexive.
Soit A une formule valide dans la classe des modèles où la relation d'accessibilité est réflexive. Donc A va être valide dans M_T. Par (*), A est un théorème de T, $\models_T A$.

Il en est de même pour les autres systèmes.

7.2.1 Difficultés par rapport à la logique propositionnelle

Dans le cas de la logique propositionnelle, on passe par la notion de constante, qui dépend de la notion de prouvabilité ($\vDash_{\mathsf{PL}}$). Dans le cas de la logique modale, on a besoin d'une notion semblable pour chaque système modal.
Il y a une autre complication : dans le cas de la logique propositionnelle, on a la relation $\Gamma \vDash_{\mathsf{PL}} A$. On n'a pas cette notion dans le cas de la logique modale. On va employer une notion plus restreinte.

Définition 50 (La Σ-prouvabilité et la Σ-constance.) *Soient Σ un système modal (c'est-à-dire K, T, S4, S5), Γ une collection de formules, et A une formule.*

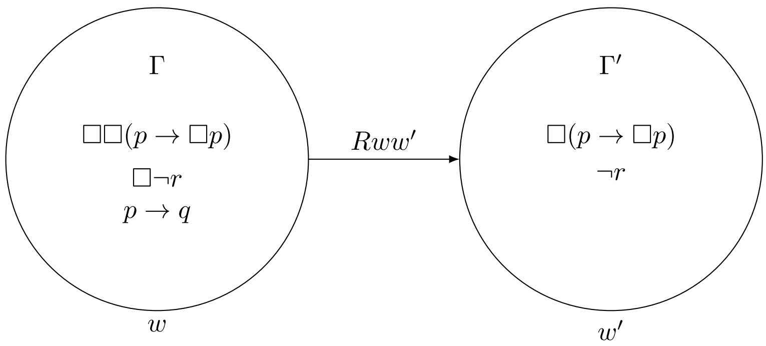
- *Γ dérive A dans le système Σ, $\Gamma \vDash_{\Sigma} A \iff$ il y a une liste finie $A_1, ..., A_n$ dans Γ telle que : $\vDash_{\Sigma} (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \to A$.*
- *Γ est Σ-consistant : $\Gamma \vDash_{\Sigma} \bot$.*
- *Γ est Σ-consistant : $\Gamma \nvDash_{\Sigma} \bot$.* *(On rappelle que $\bot$ est $\neg(p \to p)$).*

7.2.2 Le modèle canonique

Définition 51 *Soit Σ un système modal. Le modèle canonique M_Σ associé à Σ est $M_\Sigma = \langle W, R, V \rangle$ tel que*

- *W est l'ensemble de tous les ensembles Γ :*
  1. *Γ est Σ-consistant*
  2. *Γ est maximal*
- *Pour chaque w, w' dans W :*
$$Rww' \iff \{B : \Box B \in w\} \subseteq w'$$
- *Pour chaque symbole atomique p et chaque monde possible $v \in W$*
$$v \in V(p) \iff p \in v$$

• Chaque ensemble Γ qui est maximalement consistant est un monde possible dans W.
En plus, W est la collection de *tous* les ensembles consistants et maximaux.
• Par la relation d'accessibilité :



On raisonne de la façon suivante :

1. On fait une liste avec toutes les formules de w.
2. On selectionne dans la liste seulement les formules qui commencent par $\Box$.
3. On enlève la boîte de cette formule ($\Box A$ devient A).
4. Si la collection des formules qui restent se trouve dans w', alors on a Rww'.

Exemple 52
1. *$w = \{p \to q, \Box\neg q, \neg\Box p, \Box\Box(p \to \Box p\}$, $w' = \{\neg q, \Box(p \to \Box p)$, $\Box\Box p\}$*
2. *$\{\Box\neg q, \Box\Box(p \to \Box p)\}$*
3. *$\{\neg q, \Box(p \to \Box p\} =: C$*
4. *$C \subseteq w'$, donc Rww'*

La construction du modèle canonique ne dit rien sur la relation d'accessibilité (si elle est réflexive, sériale, etc.). Par conséquent, il n'est pas genant que le modèle canonique M_Σ soit un modèle pour Σ (i.e. $M_\Sigma \models \Sigma$).Cela est le cas de toutes façons, comme nous allons le voir.
Nous observons que pour les énoncés atomiques p, p est vrai dans le monde w ($M_\Sigma, w \models p$) si et seulement si p appartient à w. Comme dans le cas de la logique prépositionnelle, on va montrer que cette propriété est vraie pour tout formule A.
Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on commence par prouver quelques propriétés des ensembles des formules qui sont maximalement consistants. Le résultat principal est :

Théorème 53 *Soit Δ un ensemble de formules, Δ est Σ-consistant et maximal. Alors il y a un ensemble de formules Γ :*
1. *Γ est Σ-maximal*
2. *Γ est Σ-consistant*
3. *$\Delta \subseteq \Gamma$.*

Démonstration 54 *Elle est similaire au théorème équivalent en logique propositionnelle, (voir 42).*

Lemme 55 *Soit Γ un ensemble de formules Σ-consistant et maximal. On a :*
1. *Pour chaque formule A, on a exactement une possibilité entre $A \in \Gamma$ et $\neg A \in \Gamma$*
2. *Si $(A \to B) \in \Gamma$, alors $A \notin \Gamma$ ou $B \in \Gamma$*
3. *Si $\models_\Sigma A$, alors $A \in \Gamma$*
4. *Si $\models_\Sigma A \to B$ et $\models_\Sigma A$, alors $\models_\Sigma B$*

Lemme 56 *Soit A consistant et maximal. Si la formule $\neg\Box A \in \Delta$, alors il y a un ensemble Γ :*
1. *Γ est Σ-consistant et maximal*
2. *$\neg A \in \Gamma$*
3. *$\{B : \Box B \in \Delta\} \subseteq \Gamma$.*

7.2.3 Vérité dans un modèle canonique

Théorème 57 *Soit Σ un système modal (K, T, D, S4, S5) et M_Σ son modèle canonique, $M_\Sigma = \langle W, R, V\rangle$. Pour chaque $w \in W$, chaque formule A, on a :*

$$M_\Sigma, w \models A \iff A \in w$$

Démonstration 58 *Par induction sur la complexité de A :*
- *Si A est un symbole propositionnel p, cela est vrai par la définition : $v \in V(p) \iff p \in v$.*

– *Si A est $\Box B$, supposons que $M_\Sigma, w \models \Box B$. Donc pour chaque $w' \in W$, si Rww', alors $M_\Sigma, w' \models B$.*
  Par l'hypothèse d'induction, pour chaque w', si Rww', alors $B \in w'$. Supposons, par réduction à l'absurde, que $\Box B \notin w$. Par le lemme il y a un mode possible $w*$ tel que $\neg B \in w*$. En plus, $\{B : \Box B \in w\} \subseteq w*$. Donc par la définition de R, on a $Rww*$. Donc on doit avoir $B \in w*$. Mais $w*$ contient aussi $\neg B$, ce qui contredit la consistance de $w*$.
  Pour l'autre direction, supposons que $\Box A \in w$. Afin de montrer que $M_\Sigma, w \models \Box A$, soit w' tel que Rww'. Par la définition de R, $\{B : \Box B \in w\} \subseteq w'$. Comme $\Box A \in w$, $A \in w'$. Donc par l'hypothèse d'induction, $M_\Sigma, w' \models A$, alors $M_\Sigma, w \models \Box A$.

Corollaire 59 *Si A est valide dans le modèle canonique M_Σ associé au système Σ, alors $\vdash_\Sigma A$. En effet, $M_\Sigma \models A \iff \vdash_\Sigma A$.*

Démonstration 60 *Soit $M_\Sigma = \langle W, R, V \rangle$ le modèle canonique associé à Σ. Supposons que $\vdash_\Sigma A$. Par le lemme, $A \in \Sigma$, pour chaque ensemble maximal Σ-consistant Γ, donc A appartient à chaque monde possible $v \in W$. Par le théorème précédent, $M_\Sigma, v \models A$ dans chaque $v \in W$, donc $M_\Sigma \models A$.*
Pour l'autre direction, supposons que $\nvdash_\Sigma A$. Donc $\{\neg A\}$ est Σ-consistant.[4] *Donc il y a un ensemble Γ maximal et Σ-consistant tel que $\{\neg A\} \subseteq \Gamma$, c'est-à-dire $\neg A \in \Gamma$, Γ vu ici comme un monde possible w. Par le théorème précédent, $M_\Sigma, w \models \neg A$, donc $M_\Sigma \models \neg A$.*

4. Supposons que $\{\neg A\}$ ne soit pas Σ-consistant. Alors $\{\neg A\} \vdash_\Sigma \bot$, donc $\vdash_\Sigma \{\neg A\} \to \bot$, ce qui est équivalent à $\vdash_\Sigma A$ et donne une contradiction.

Chapitre 8

Les arguments *slingshot*

8.1 Présentation technique de Ix

8.1.1 Syntaxe

On étend les langages du premier ordre avec des *descriptions définies*. On veut pouvoir traiter des expressions comme :

Le père de Bush
Le roi de France

On introduit un nouveau symbole, ix pour l'expression ≪ le ≫. Il se combine avec des prédicats pour former des noms :

le chat
le roi

Du point de vue formel, ix se combine avec des formules $A(x)$ pour former un *terme* :

$$ixA(x)$$

qui signifie : *le seul x qui a la propriété A.*

Exemple 61 *On symbolise ainsi l'expression Le fermier qui a sauvé quelqu'un par :*

$$ix(F(x) \wedge \exists y S(x, y))$$

Le prédicat F(x) d'arité un signifiant ≪ x est fermier ≫et S(x, y) d'arité deux signifie ≪ x a sauvé y ≫.

Extension de la définition de terme

On obtient alors une extension du langage du premier ordre, car il définit ainsi les termes :

– chaque constante individuelle est un terme
– chaque variable est un terme
– si A est une formule, alors ixA est un terme

8.1.2 Sémantique

Du point de vue sémantique, il y a quelques complications. Supposons que K symbolise le prédicat binaire ≪ le roi de ≫et a ≪ les U.S.A. ≫. La question est quelle est l'interprétation de

$$ixKxa$$

Il y a deux cas qui posent problème : si il n'y a pas d'individu dans l'univers qui satisfait Kxa et si plusieurs objets satisfont Kxa.
Pour le premier cas, on tranche en affirmant que chaque énoncé atomique qui contient une description définie vide est fausse. Une façon de le dire est d'inclure dans chaque modèle une entité qui est l'objet vide, en dehors de l'univers.

On a alors les modèles $\mathcal{M} = (D, I, e)$:
- D est l'univers du modèle
- I est la fonction d'interprétation qui associe à chaque symbole R une relation $I(R)$ dans D^n, n étant l'arité de R.
- $I(c) \in D$ pour chaque constante individuelle c.
- $e \notin D$.

On ajoute une assignation g pour les variables. La valeur sémantique d'un terme t dans $\mathcal{M}$ selon g, $t^{\mathcal{M},g}$, est définie comme suit :

$$t^{M,g} = \begin{cases} g(x) & \text{si } t \text{ est la variable } x \\ I(c) & \text{si } t \text{ est la constante } c \\ \text{l'unique } w \in D & \text{si } t \text{ est } ixA \text{ tel que } \langle \mathcal{M}, g(x/a) \rangle \vDash A \\ e & \text{si il n'y a pas d'objet unique dans } D \text{ qui satisfait la clause précédente.} \end{cases}$$

Plus simplement : la désignation de ixA dans $\mathcal{M}$ est l'unique objet qui satisfait A si il y a un tel objet, autrement elle est e.
Autrement dit, chaque fois qu'on a un seul individu u qui satisfait

$$\langle \mathcal{M}, g(x/u) \rangle \vDash A$$

on a $(ixA)^{M,g}$ est l'individu u.

Exemple 62 *Soit $\mathcal{M} = \langle D, V, e \rangle$ un modèle adapté à un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre qui contient une constante individuelle 1 et un symbole de prédicat unaire (à une place) P.*
$D = \{0, 1, 2\}$ $\quad V(1) = \{1\}$ $\quad V(P) = \{1, 2\}$ *Soit g une assignation arbitraire, on a alors :*

$$\langle \mathcal{M}, g(x/1) \rangle \vDash x = 1$$
$$\langle \mathcal{M}, g(x/1) \rangle \vDash P(x)$$

Etant donné que :

$$\langle \mathcal{M}, g(x/1) \rangle \vDash P(x) \textit{ et } \langle \mathcal{M}, g(x/2) \rangle \vDash P(x)$$

on a :

$$(ixP(x))^{M,g} \textit{ est } e$$

Mais 1 est le seul individu à satisfaire

$$\langle \mathcal{M}, g(x/1) \rangle \vDash (x = 1 \wedge P(x))$$

Donc : $(ix(x = 1 \wedge P(x)))^{M,g}$ est 1.

8.1.3 Equivalence logique de $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$

Nous allons maintenant montrer que les formules $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$ sont logiquement équivalentes.
Soit g une assignation arbitraire.

Démonstration 63 ($A(a) \rightarrow a = ix(x = a \wedge A(x))$) *Supposons $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A(a)$.*
Dans la logique du premier ordre on a le théorème suivant :

$$\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A(a) \iff \langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$$

Donc $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$
Puisque $I(a)$ est le seul individu à satisfaire cette formule, on a :

$$[ix(x = a \wedge A(x)]^{M,g} \text{ est } I(a).$$

Mais dans ce cas on a aussi :

$$\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash a = ix(x = a \wedge A(x))$$

Démonstration 64 ($a = ix(x = a \wedge A(x)) \rightarrow A(a)$) *On suppose que $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash a = ix(x = a \wedge A(x))$.*
Donc $[ix(x = a \wedge A(x)]^{M,g}$ est $I(a)$.
Donc $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge A(a)$, ce qui implique

$$\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$$

Et par le théorème mentionné plus haut on a :

$$\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A(a)$$

8.1.4 Corolaire de l'équivalence logique

Soient $A(a)$ et $B(a)$ deux formules qui contiennent la constante individuelle a.
Si $A(a)$ et $B(a)$ sont vraies, alors les termes

$$ix(x = a \wedge A(x)) \text{ et } ix(x = a \wedge B(x))$$

désignent le même individu.

Démonstration 65 *On cherche à démonstrer que si $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A(a)$ et $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash B(a)$, alors $[ix(x = a) \wedge A(x)]^{M,g} = [ix(x = a) \wedge B(x)]^{M,g}$.*
On suppose que

1. $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash A(a)$
2. $\langle \mathcal{M}, g\rangle \vDash B(a)$
   Par le théorème mentionné on a alors
3. $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash A(x)$
4. $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash B(x)$
   Donc
5. $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge A(x)$
6. $\langle \mathcal{M}, g(x/I(a))\rangle \vDash x = a \wedge B(x)$
   En effet, $I(a)$ est le seul individu qui satisfait 5. et 6. .

Donc : $[ix(x = a) \wedge A(x)]^{M,g} = I(a) = [ix(x = a) \wedge B(x)]^{M,g}$.

8.2 Le *slingshot* de Gödel

8.2.1 Les arguments employés

Le *slingshot* de Gödel emploie les arguments suivants :

– *SCR* [1] : Si l'énoncé A correspond au fait f alors l'énoncé A' obtenu de A par la substitution d'un terme coréférentiel correspond aussi au fait f.
– *SLE* [2] : Deux énoncés logiquement équivalents correspondent au même fait.

On a vu que les deux faits suivants sont valides :

– *(F$_1$)* : $A(a)$ et $a = ix(x = a \wedge A(x))$ sont logiquement équivalents pour tout énoncé A qui contient la constante a.
– *(F$_2$)* : Si $A(a)$ et $B(a)$ sont vrais, alors $ix(x = a \wedge A(x))$ et $ix(x = a \wedge B(x))$ désignent le même individu.

8.2.2 Le *slingshot*

Supposons que $F(a)$, $a \neq b$ et $G(b)$ sont trois énoncés vrais.

1. $F(a)$ correspond au fait f_1. Prémisse
2. $a \neq b$ correspond au fait f_2. Prémisse
3. $G(b)$ correspond au fait f_3. Prémisse
4. $a = ix(x = a \wedge F(x))$ correspond au fait f_1. (1, SLE)
5. $a = ix(x = a \wedge x \neq b)$ correspond au fait f_2. (2, SLE)
6. $a = ix(x = a \wedge x \neq b)$ correspond au fait f_1. (5, 4, SCR)

Donc, par 5. et 6., $f_1 = f_2$.

Exercice 66 *Démontrez que* $f_2 = f_3$.

8.3 L'argument de Church

8.3.1 Les outils employés

On emploie une extension d'un langage du premier ordre avec $\{x = A(x)\}$ qui dénote la classe des entités qui ont la propriété A.

On présuppose :

– *(SCR)* : la substitution des termes coréférentiels, défini comme précédemment.
– *(SLE)* : deux énoncés qui sont logiquement équivalents désignent le même fait, la même proposition.

Deux observations sont essentielles dans la preuve :

– *O1* : A et $\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\}$ sont logiquement équivalents.
– *O2* : chaque fois que les énoncés A et B sont vrais, les descriptions
$\{x : x = x \wedge A\}$ et $\{x : x = x \wedge B\}$ définissent la même classe.

1. En français : Substitution des Termes Coréférentiels
2. En français : Substitution des Equivalences Logiques

Rappel de la notion de classe.

Afin de montrer *O1*, on rappelle quelques faits élémentaires :
– $\{x : x > 0\}$ définit (dans l'univers des nombres naturels) la classe $\{1, 2, 3, 4, ...\}$.
– $\{x : x = 1\}$ designe $\{1\}$.
– $\{x : x \neq x\}$ désigne $\emptyset$.
– $\{x : 2 = 2\}$ désigne la classe universelle (tout l'univers).
Donc $\{x : x = x\}$ et $\{x : 2 = 2\}$ désignent la même classe.

Démonstration de *O1*

Supposons que A soit un énoncé vrai. Alors le terme $\{x : x = x \wedge A\}$ désigne l'univers, c'est-à-dire la même classe que $\{x : x = x\}$. Donc :

$$\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\} \tag{+}$$

Dans l'autre direction, supposons que (+) soit vrai, il est évident que A doit être vraie !

Démonstration de *O2*

Comme A est vraie, $\{x : x = x \wedge A\}$ désigne la classe universelle, et il en est de même pour $\{x : x = x \wedge B\}$.

8.3.2 L'argument du *slingshot* de Church et Davidson

1. A — Prémisse
2. B — Prémisse
3. A correspond au fait f_1. — Prémisse
4. $\{x : x = x \wedge A\} = \{x : x = x\}$ correspond au fait f_1. — (3, SLE)
5. $\{x : x = x \wedge B\} = \{x : x = x\}$ correspond au fait f_1. — (4, SCR)
6. B correspond au fait f_1. — (5, 2, SLE)

Donc par la conclusion A et B correspondent au même fait.

8.4 Quine

8.4.1 Les outils de Quine

On définit δp :
$\delta p : ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$

L'observation 5 et sa démonstration

O5 : p et δp sont logiquement équivalents.

La vérité de p implique celle de δp Supposons que p soit vrai. Donc le disjoint

$$(x = 1 \wedge p)$$

est satisfait pour un seul objet, la dénotation de 1. Donc $ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$ est vrai.

La vérité de δp implique celle de p Supposons que $\delta p = 1$, alors la dénotation de

$$ix[(x = 1 \wedge p) \vee (x = 0 \wedge \neg p)]$$

doit être la dénotation de 1. Mais dans ce cas, il doit y avoir un seul objet qui satisfait

$$x = 1 \wedge p$$

et donc p doit être vrai.

L'observation 6 et sa démonstration

O6 : chaque fois que A et B sont vrais, alors δA et δB désignent le même individu.

Cela se voit de la façon suivante :
Supposons que A et B soient vraies.
$\delta A =: ix[(x = 1 \wedge A) \vee (x = 0 \wedge \neg A)]$ (a)
$\delta B =: ix[(x = 1 \wedge B) \vee (x = 0 \wedge \neg B)]$ (b)
Comme A et B sont vrais, le disjoint $(x = 1 \wedge A)$ est satisfait par exactement un seul individu (la dénotation de 1). La même chose vaut pour $(x = 1 \wedge B)$.
Donc la dénotation de (a) est identique à celle de (b) : elles sont toutes les deux la dénotation de 1.

8.4.2 Le *slingshot* de Quine

1. A Prémisse
2. B Prémisse
3. $\Box A$ Prémisse
4. $\Box(\delta A = 1)$ (3, SLE)
5. $\delta A = \delta B$ (1, 2, O6)
6. $\Box(\delta B = 1)$ (4, 5)
7. $\Box B$ (6, SLE)

On constate que l'argument de Quine prouve en fait que $\Box$ est un opérateur *extentionnel* : à partir de la prémisse $\Box A$ et du fait que A et B soient matériellement équivalents, on en conclut $\Box B$.

Chapitre 9

Exercices

9.1 Exercices sur la logique modale propositionnelle

9.1.1 Validité dans un monde, validité dans un modèle

Soient :
- $\mathcal{L} = p, q, r$
- $\mathcal{M} = \langle W, P \rangle$ avec
  - $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
  - $P(p) = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
  - $P(q) = \{w_1, w_2\}$
  - $P(r) = \{w_2, w_3\}$

Exercice de logique propositionnelle

Montrez de façon détaillée que :

1. $M, w_1 \models r \rightarrow p$
2. $M, w_2 \models (q \wedge r) \vee p$
3. $M, w_3 \models (q \vee r) \wedge p$
4. $M, w_4 \models \neg q$

Exercice de logique modale propositionnelle

Démontrez que :

1. $\mathcal{M} \models \Box p$
2. $\mathcal{M} \models \Diamond \neg r$
3. $\mathcal{M} \models \Box(r \rightarrow p)$
4. $\mathcal{M} \models \Diamond(q \wedge r)$
5. $M \not\models \Box r \vee \Diamond \neg p$

9.1.2 Validité d'une formule

Dites à quelle condition une formule est valide et prouvez la validité de celles-ci :

1. $\models \Box A \rightarrow \Diamond A$

2. $\vDash \Box A \to A$
3. $\vDash A \to \Box\Diamond A$
4. $\vDash \Box A \to \Box\Box A$
5. $\vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$

Solution pour $\vDash \Box A \to \Diamond A$.

Soit $M = (W, P)$ et w un monde dans W. On applique la clause
$M, w \vDash A \to B \Longleftrightarrow$ Si $M, w \vDash A$ alors $M, w \vDash B$

Supposons que $M, w \vDash \Box A$. Donc, par la clause pour $\Box A$: $M, w' \vDash A$, pour chaque w' dans W.

En particulier, $M, w' \vDash A$, pour au moins un w' dans W.

Donc, par la clause pour $\Diamond A$: $M, w \vDash \Diamond A$.

9.2 Exercices sur la logique du premier ordre

Soient :
- $\mathcal{L} = \{c^0, m^0, s^0, F^1, A^2, E^2\}$
- $\mathcal{M} = \langle D, I\rangle$, avec :
  - $D = \{$Cécile, Maria, Susie$\}$
  - $I(c) = \{$Cécile$\}$
  - $I(m) = \{$Maria$\}$
  - $I(s) = \{$Susie$\}$
  - $I(F) = \{$Cécile, Maria, Susie $\}$
  - $I(A) = \{\langle$Cécile, Maria$\rangle, \langle$Maria, Susie$\rangle\}$
  - $I(E) = \{\langle$Maria, Susie$\rangle, \langle$Maria, Cécile$\rangle\}$

1. Trouvez une structure $\mathcal{M}$ et une assignation g telle que $\mathcal{M} \vDash A(c, m) \wedge \exists x E(x, s) \wedge \forall y(F(y))$
2. Montrez que $\mathcal{M} \vDash (\forall x\ x \neq m \to E(m, x))$
3. Trouvez une assignation g telle que $\mathcal{M} \vDash F(x) \wedge A(c, x) \wedge E(x, c)$
4. Montrez qu'il n'existe pas d'assignation telle que $\mathcal{M} \vDash A(x, y) \wedge E(x, y) \wedge x \neq m$. Concluez : $M \nvDash A(x, y) \wedge E(x, y) \wedge x \neq m$.
5. Montrez que $\mathcal{M} \vDash \forall x \forall y(E(x, y) \to x \neq y)$.

9.3 Le Systeme de Carnap

9.3.1 Quelques vérités logiques

En vous placant dans le système de Carnap, en vous dotant d'un ou de plusieurs états descriptifs S et d'assignation(s) g, démontrez les vérités logiques suivantes :

1. $\vDash \Box A \leftrightarrow \vDash A$
2. $\vDash t = t$
3. $\nvDash \forall x \forall y(x = y \to \Box(x = y))$
4. $\nvDash \forall x \forall y(x \neq y \to \Box(x \neq y))$

Les points 3 et 4 indiquent que la nécessité logique n'est pas la nécessité analytique. On peut les démontrer à l'aide de contre-exemples : prenez des cas ou $x = y$ et pourtant il n'est pas obligatoire que x soit égal à y, c'est à dire qu'il existe des états S où ça n'est pas le cas.

9.3.2 Les formules de Barcan

Les formules de Barcan sont les suivantes :
- $\phi = \forall x \Box A(x) \to \Box \forall x A(x)$
- $\psi = \Box \forall x A(x) \to \forall x \Box A(x)$

1. Montrez que les formules de Barcan ne sont pas valides dans la classe de structures $S5$ de Kripke. C'est-à-dire trouvez des structures S et S' telles que $S \nvDash \phi$ et $S' \nvDash \psi$.
2. Quelles sont les liberté s que l'on pourrait prendre par rapport aux règles de $S5$ pour rendre ϕ et ψ valides dans la classe des structures $S5$ de Kripke ?

Solution pour (1).
Soit $M = (S, I)$, avec $S = (W, D, R, E, w_0)$, où :
- $W = \{w_0, w\}$
- $D = \{a, b\}$
- $w_0 R w$
- $E(w_0) = \{a\}, E(w) = \{a, b\}$

On specifie maintenant I :

$$(P, w_0) = \{a\}, I(P, w) = \{a\}$$

On va montrer que pour chaque assignation g on a :

$$M, w_0, g \nvDash \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$$

On a $M, w_0, g \vDash \forall x \Box P(x)$, car (i) $M, w_0, g(x/a) \vDash \Box P(x)$.

Afin de montrer (i) il faut montrer que $M, w, g(x/a) \vDash P(x)$, ce qui revient à montrer que $x^{M,g(x/a)} \in I(P, w)$.

Mais $x^{M,g(x/a)} = a$ et $I(P, w) = \{a\}$.

De l'autre cote, on observe que $M, w_0, g \nvDash \Box \forall x P(x)$. Cela se voit de la maniere suivante :

Supposons que $M, w_0, g \vDash \Box \forall x P(x)$. Alors $M, v, g \vDash \forall x P(x)$ pour chaque v accessible de w_0.

Comme w est accessible de w_0 on doit avoir $M, w, g \vDash \forall x P(x)$.

En d'autres termes, on doit avoir $M, w, g(x, a) \vDash P(x)$ et $M, w, g(x, b) \vDash P(x)$. Cela revient à $x^{M,g(x/a)} \in I(P, w)$, donc $a \in \{a\}$ $x^{M,g(x/b)} \in I(P, w)$, donc $b \in \{a\}$ Mais la derniere assertion est fausse. On a finit de montrer que $M, w_0, g \nvDash \forall x \Box P(x) \to \Box \forall x P(x)$.

9.3.3 Necessity of identicals

Montrez la validité des formules suivantes en $S5$:

1. $\forall x \forall y (x = y \to \Box(x = y))$
2. $c = d \to \Box(c = d)$

Chapitre 10

Bissimulation

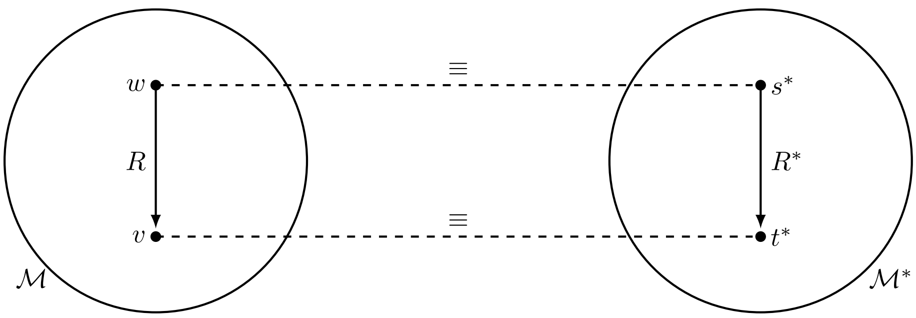
Fixons deux modèles

$$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \text{ et } \mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$$

pour un langage modal propositionnel. Les mondes de W seront notés w, v, w_1, etc., ceux de W^*, s^*, t^*, u^*, etc.
Nous conserverons cette notation pour le reste de ce chapitre.

Définition 67 *Une bissimulation entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$ est une relation binaire (notée $\equiv$) entre W et W^* (donc $\equiv \subseteq W \times W^*$) telle que pour chaque $w \in W$ et $s^* \in W^*$, on a :*

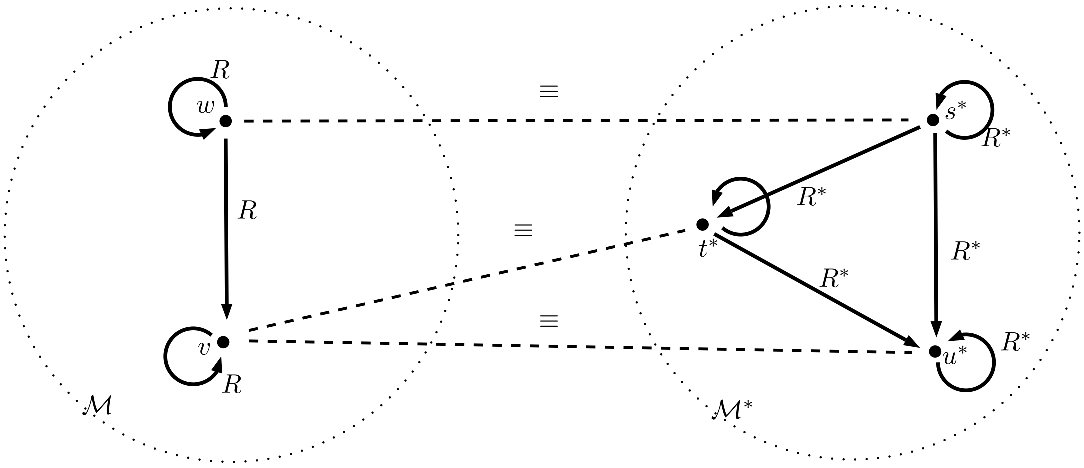
$$w \equiv s^* \Rightarrow \begin{cases} \textit{a) } w \textit{ et } s^* \textit{ satisfont les mêmes formules atomiques : } \langle \mathcal{M}, w \rangle \vDash p_i \iff \langle \mathcal{M}^*, s^* \rangle \vDash p_i. \\ \textit{b) Si } R(w,v)\textit{, alors il y a } t^* \in W^* \textit{ tel que } R^*(s^*,t^*) \textit{ et } v \equiv t^* \\ \textit{c) Si } R^*(s^*,t^*)\textit{, alors il y a } v \in W \textit{ tel que } R(w,v) \textit{ et } v \equiv s^*. \end{cases}$$



Exemple 68 *On fixe les deux structures d'un même langage de la façon suivante :*

$\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ *, avec*
- $W = \{w, v\}$
- $R = \{\langle w, v \rangle, \langle w, w \rangle, \langle v, v \rangle\}$
- $V(p) = \{w\}$

$\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^* \rangle$ *, avec*
- $W^* = \{s^*, t^*, u^*\}$
- $R^* = \{\langle s^*, s^* \rangle, \langle s^*, t^* \rangle, \langle s^*, u^* \rangle, \langle t^*, u^* \rangle, \langle t^*, t^* \rangle, \langle u^*, u^* \rangle\}$
- $V^*(p) = \{s^*\}$



La relation $\equiv = \{\langle w, s^*\rangle, \langle v, t^*\rangle, \langle v, u^*\rangle\}$ *est une bissimulation.*
D'abord on vérifie que les mondes en relation par la bissimulation vérifient les mêmes formules atomiques :

- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash p$, *car* $w \in V(p)$ *et* $s^* \in V^*(p)$
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle \nvDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \nvDash p$, *car* $v \notin V(p)$ *et* $t^* \notin V^*(p)$
- $\langle \mathcal{M}, v\rangle \nvDash p$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, u^*\rangle \nvDash p$, *car* $v \notin V(p)$ *et* $u^* \notin V^*(p)$

Ensuite on vérifie la propriété b) de la ***Définition 67*** *:*

- $w \equiv s^*$ *et* $R(w, w)$, *de même* $R^*(s^*, s^*)$ *et* $s^* \equiv w$.
- $w \equiv s^*$ *et* $R(w, v)$, *de même* $R^*(s^*, t^*)$ *et* $t^* \equiv v$.
- $v \equiv t^*$ *et* $R(v, v)$, *de même* $R^*(t^*, t^*)$ *et* $t^* \equiv v$.
- $v \equiv u^*$ *et* $R(v, v)$, *de même* $R^*(u^*, u^*)$ *et* $u^* \equiv v$.

Enfin on vérifie la propriété c) :

- $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, s^*)$, *de même* $R(w, w)$ *et* $w \equiv s^*$.
- $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, t^*)$, *de même* $R(w, v)$ *et* $v \equiv t^*$.
- $s^* \equiv w$ *et* $R^*(s^*, u^*)$, *de même* $R(w, v)$ *et* $v \equiv u^*$.
- $t^* \equiv v$ *et* $R^*(t^*, t^*)$, *de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv t^*$.
- $t^* \equiv v$ *et* $R^*(t^*, u^*)$, *de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv u^*$.
- $u^* \equiv v$ *et* $R^*(u^*, u^*)$, *de même* $R(v, v)$ *et* $v \equiv u^*$.

Exercice 69 q *est la seule proposition de notre langage* $\mathcal{L}$, *et on a par ailleurs :*

la structure $\mathcal{M}$ *telle que :*

- $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$
- *Avec* $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 2,4\rangle\}$
- $V(q) = \{2, 3, 4, 5\}$.

la structure $\mathcal{M}^*$ *telle que :*

- $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$
- *Avec* $W^* = \{a, b, c, d\}$
- $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$
- $V^*(q) = \{b, c, d\}$.

1. *Tracez un schéma représentant les relations entre les mondes de* W *et les mondes de* W^*.

2. *Vérifiez que* $\equiv = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle, \langle 4, d\rangle, \langle 5, d\rangle\}$ *est une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$.

3. *Existe-t-il d'autres bissimulations entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$ *? Si oui, lesquelles ?*

Théorème 70 (de bissimulation) *Soient* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *et* $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$ *deux modèles du même langage modal* $\mathcal{L}$*. Si* $\equiv$ *est une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$*, alors pour tout* $w \in W$*,* $s^* \in W^*$ *et pour toute formule* A *de* $\mathcal{L}$ *:*

$$w \equiv s^* \Longrightarrow [\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash A]$$

Démonstration 71 *La démonstration se fait par induction sur la longueur des formules. L'hypothèse d'induction est que pour chaque* $w \in W$*,* $s^* \in W^*$ *et formule* B *de complexité moindre que* A*, on a :*

$$w \equiv s^* \Rightarrow [\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B]$$

Si A est atomique *Supposons que* $w \equiv s^*$*, alors*

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p_i \iff \langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash p_i$$

est valide en vertu de la propriété a) de la bissimulation.

Si A est $\Diamond B$ *Supposons que* $w \equiv s^*$ *et* $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \Diamond B$*. Par définition des conditions de validité de* $\Diamond$*, il y a* $v \in W$ *tel que* $R(w, v)$ *et* $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash B$*.*
Par la propriété b), il y a un $t^* \in W^*$ *tel que* $R^*(s^*, t^*)$ *et* $t^* \equiv v$*. Puisque* B *est de complexité moindre que* $\Diamond B$*, et que* $t^* \equiv v$*, on peut appliquer l'hypothèse d'induction et on a :*

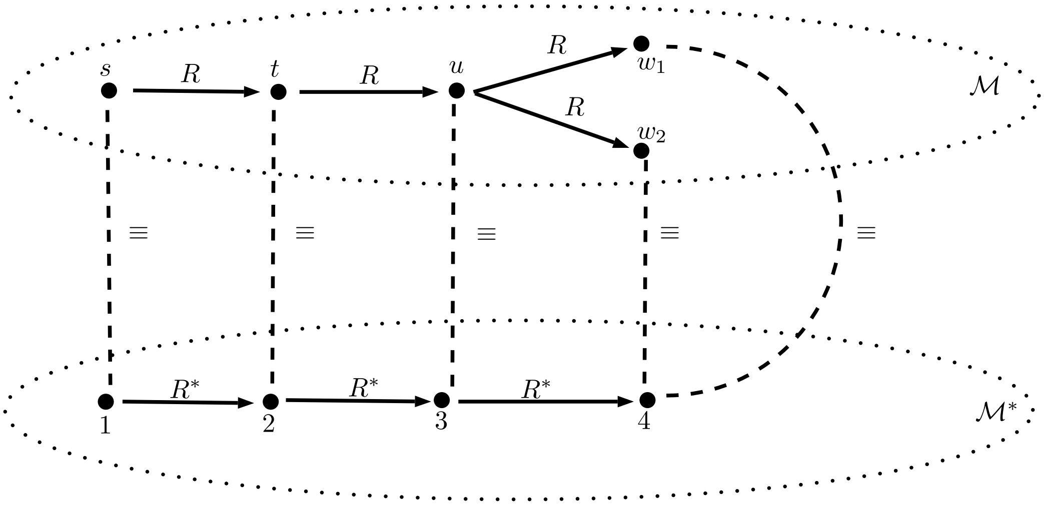
$$\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash B \iff \langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash B$$

Donc $\langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash B$ *et étant donné que* $R^*(s^*, t^*)$*, on a* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash \Diamond B$*.*
Démontrer que $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash \Diamond B$ *implique que* $\langle \mathcal{M}, v\rangle \vDash \Diamond B$ *se fait de façon analogue.*

Si A est $B \wedge C$ *Si* $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B \wedge C$*, alors* $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B$ *et* $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash C$*, car il est toujours possible d'éliminer la conjonction.*
Si $w \equiv s^*$*, alors par hypothèse d'induction, puisque* B *et* C *sont de complexité moindre que* A*,* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B$ *et* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash C$*. Par introduction de la conjonction, on obtient* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash B \wedge C$*.*

La démonstration avec les autres connecteurs logiques ($\vee$*,* $\rightarrow$*,* $\Box$*,* $\forall$*,* $\exists$*) est laissée au lecteur.*

Exercice 72 $V(p) = \{w_1, w_2\}$, $V^*(p) = \{4\}$.



1. *Décrivez les structures $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ et $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$ en langage ensembliste.*
2. *Vérifier que $\equiv$ est bien une bissimulation entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^*$.*
3. *Existe-t-il d'autres bissimulation entre ces structures ? Si oui, lesquelles ?*

Définition 73 *On dit qu'une formule modale A définit une propriété O de la relation d'accessibilité si pour chaque modèle $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, on a*

$$\mathcal{M} \vDash A \iff R \text{ a la propriété } O.$$

Rappel 74 $\mathcal{M} \vDash A \iff \langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A$ *pour chaque* $w \in W$.

Théorème 75 *Il n'y a aucune formule modale qui définit l'irreflexivité* [1].

Démonstration 76 *On montre grâce à la méthode de bissimulation qu'il n'existe pas de formule modale A telle que pour chaque modèle on a*

$$\mathcal{M} \vDash A \iff R \text{ est irréflexive.}$$

Supposons, par l'absurde, qu'il y a une formule A qui remplisse cette condition.

Soit $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ où
- $W = \{w\}$
- $R = \{\langle w, w\rangle\}$
- V *est indifférent.*

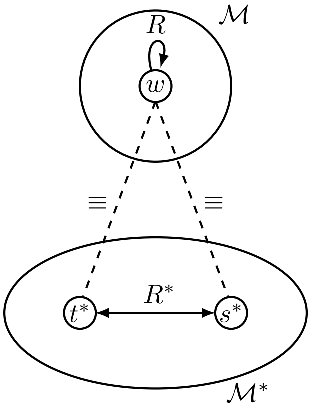
Etant donné que $R(w, w)$, on doit avoir $\langle \mathcal{M}, w\rangle \nvDash A$.

Soit $\mathcal{M}^* = \langle W^*, R^*, V^*\rangle$ où
- $W^* = \{s^*, t^*\}$
- $R^* = \{\langle s^*, t^*\rangle, \langle t^*, s^*\rangle\}$
- $V^* = \begin{cases} W^* \text{ si } V(p_i) = \{w\} \\ \emptyset \text{ si } V(p_i) = \emptyset \end{cases}$

Puisqu'on a $\neg R^*(s^*, s^*)$, on a $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash A$. On a de même $\neg R^*(t^*, t^*)$, donc $\langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash A$, et on en déduit que $\mathcal{M}^* \vDash A$.

1. La relation R est irréflexive si et seulement si $\forall w \in W\ \neg Rww$

La relation $\equiv = \{\langle w, s^*\rangle, \langle w, t^*\rangle\} \subseteq W \times W^*$*, est une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$*.*



Puisqu'on a $w \equiv t^*$ *et* $w \equiv s^*$*, par le théorème 70 de bissimulation, on doit avoir pour toute formule* C *:* $\langle \mathcal{M}^*, s^*\rangle \vDash C \iff \langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash C \iff \langle \mathcal{M}^*, t^*\rangle \vDash C$.
Or on a vu que $\mathcal{M}^* \vDash A$ *et* $\mathcal{M} \nvDash A$*. De cette contradiction on conclut que la formule* A *qui définit l'irréflexivité n'existe pas.*

Exercice 77 *Démontrez que la relation* $\equiv = \{\langle w, s^*\rangle, \langle w, t^*\rangle\}$ *de la démonstration précédente est bien une bissimulation entre* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}^*$*.*

Chapitre 11

La sémantique de Kripke pour la logique intuitioniste

On a pensé à la notion de vérité logique comme ≪vérité dans n'importe quelle situation ≫. Mais pour les intuitionistes il s'agit plutôt de la prouvabilité dans n'importe quelle situation. Les modèles de Kriple sont utiles pour donner une interprétation aux calcul intuitioniste. L'idée que l'on va déveloper est de concevoir les mondes possibles dans W comme des étapes dans la construction de preuves. Par exemple $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A$ sera desormais interprêté comme ≪la formule A a été prouvée au stage, à l'étape w.≫

Nous allons traiter $\wedge$ et $\vee$ comme des connecteurs primitifs. Un modèle intuitioniste de Kripke à la forme $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ où

- W est un ensemble de mondes possibles (≪*proof stages* ≫).
- $R \subseteq W \times W$ est une réflexive, transitive et se conforme au principe : si $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p$ et $R(w, w')$, alors $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash p$ pour chaque symbole propositionnel p.
- la fonction V de valuation associe à chaque symbole atomique p un ensemble $V(p)$ de mondes de W. On a :
- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash p \iff w \in V(p)$
- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \wedge B \iff \langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A$ et $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B$
- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \vee B \iff \langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A$ ou $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash B$
- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash \neg A \iff$ pour chaque $w' \in W$, si $R(w, w')$, alors $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \nvDash A$
- $\langle \mathcal{M}, w\rangle \vDash A \to B \iff$ pour chaque $w' \in W$, si $R(w, w')$, alors $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \nvDash A$ ou $\langle \mathcal{M}, w'\rangle \vDash B$.

On observe que $\neg$ et $\to$ se comporte plutôt comme des modalités. Intuitivement, chaque membre de W est une étape possible dans la construction d'une preuve mathématique. Chaque w est associé avec un ensemble Pv de preuves : les preuves que l'on aurait construites si l'on était parvenus à l'étage w. La relation d'accessibilité R représente les étapes qui sont compatibles du point de vue de l'étage courant.

Dans la logique intuitioniste :

- une preuve de $\neg A$ montre que A mène à une contradiction
- une preuve de $A \wedge B$ est une preuve de A et une preuve de B
- une preuve de $A \to B$ est une construction qui convertit chaque preuve de A en une preuve de B.

On voit maintenant que ces clauses inspirent les clauses sémantiques :

- A et B est prouve à l'étage w si et seulement si A est prouvé à l'étage w et B aussi.

- Une preuve de $\neg A$ est une preuve que A mène à une contradiction. Avoir prouvé $\neg A$ à l'étage w est équivalent à avoir prouve que A aboutit à une contradiction. Dans ce cas, on peut exclure de toutes les étapes futures les étages où il y a une preuve de A.
- $A \rightarrow B$ est prouvé à l'étage w s'il n'y a jamais dans un étage futur une preuve de A sans une preuve de B.

Annexe A

Notes et compléments

A.1 Matériel de rédaction

Ce document reprend le cours qu'a professé M. Sandu à l'université de Paris I en Master 1 de Philosophie, parcours LOgique, Philosophie, HIstoire et Sociologie des Sciences (*LOPHISS*). Classé dans l'U.V. *Histoire des Sciences*, plus précisément intitulé *Histoire de la Logique*, cet enseignement a été dispensé lors du premier semestre de l'année universitaire 2008-2009.
Le présent document n'aurait jamais vu le jour sans les notes que m'a aimablement transmis M. Sandu. Un chapitre correspond généralement à deux heures d'enseignement.

A.2 Considérations techniques

Ce document a été réalisé grâce à LaTeX 2$_{\varepsilon}$, plus précisément grâce à la distribution TexLive.

A.2.1 *Packages* employés

Outre les habituels *packages* `ifpdf, inputenc, babel, fontenc, amsmath, amssymb, amsfonts, latexsym, multicol, times`, nécessaires à la réalisation de tout document mathématique en français, ont été employés :
- `bussproofs`, qui permet de construire des arbres de dérivation simplement,
- `pstricks, epsfig, pst-grad, pst-plot`, utiles pour les schémas présents dans ce document.

A.2.2 Autres outils techniques

- Le texte source a été rédigé sous Kile, un puissant éditeur LaTeXpour l'environnement de bureau KDE, publié sous licence *GNU GENERAL PUBLIC LICENSE*.
- Les schémas ont été tracés grâce à Latexdraw, une petite application sous Java© très simple d'utilisation. Elle permet de dessiner sous un logiciel type Paint© et d'obtenir le code à integrer directement dans le document.
- Les symboles $\models_{\mathsf{PL}}$, $\models_{\Sigma}$, etc., ont été obtenus simplement grâce à la macro inventée par M. Joinet, dont je me suis ici inspiré. Le code est de la forme

```
{\mathop{\vdash{\raisebox{-0,3ex}{\hspace{-1,6ex}${\mbox{\tiny{$\mathsf
{PL}$}}}$}}}}}
```

A.2.3 Compilation

A cause de ces schémas ici présents, il est nécessaire de compiler le fichier `.tex` d'abord en `.dvi`, puis en `.ps`, et enfin en `.pdf`.

A.3 Coquilles et contact

Le fichier source est disponible sur simple demande.
Toute remarque, correction, suggestion, est bienvenue :

`aubert[AT]lipn.univ-paris13.fr`

.
Les éventuelles erreurs du présent document ne sont en aucun cas imputables à M. Sandu, qui peut être contacté à

`sandu[AT]mappi.helsinki.fi`