TP nº 5 - Applications pratiques : retour aux mathématiques

Tous les sujets et les corrigés sont disponibles aux adresses suivantes :
`http://www.lif.univ-mrs.fr/~vpoupet/enseignement/matlab09.php`
`http://www.lif.univ-mrs.fr/~pvanier/?q=cours`

Exercice 1. *Monsieur et madame Ohm ont une fille...*

Dans cet exercice, nous allons voir comment utiliser *Matlab* pour représenter et manipuler des polynômes à coefficients réels ou complexes.

1. En considérant les polynômes comme des suites presques nulles de coefficients, comment proposez-vous de les représenter simplement en *Matlab* ?

Réponse : Il suffit de les représenter par des vecteurs : en effet, un polynôme étant déterminé par ses coefficients, il suffit de stocker ceux-ci. La méthode la plus intelligente consiste à stocker le coefficient du monôme de degré 0 dans la première coordonnée du vecteur et le coefficient du monôme de plus haut degré dans la dernière. On décide ici d'utiliser des vecteurs lignes, mais cela ne change pratiquement rien, sinon des détails d'implémentation.

2. Ecrivez une fonction qui, étant donné un polynôme P sous la forme décidée précédemment, renvoie son degré.

Réponse :

```
function r=poly_deg(P)
 n=size(P,2);
 r=0;
 for i=1:n
  if P(i)~=0
   r=i-1;
  end
 end
```

3. Ecrivez une fonction qui, étant donné un polynôme P et un entier k, renvoie le coefficient de X^k dans P.

Réponse :

```
function r=poly_coeff(P,k)
n=size(P,2);
if k>n
 r=0;
else
 r=P(k);
end
```

4. Ecrivez une fonction `poly_somme(P, Q)` qui renvoie la somme des polynômes P et Q.
Indication : Si les représentations de P et Q ont la même taille, la somme est très facile à faire. Si les dimensions ne coïncident pas, vous pouvez utiliser la fonction `zeros(x, y)` et la notation `[tab1, tab2]`. Ou alors vous pouvez aussi faire des boucles `for`...

Réponse :

```
function R=poly_somme(P,Q)
 np=size(P,2);
 nq=size(Q,2);
 if np>nq
  Q=[Q,zeros(1,np-nq)];
 elseif np<nq
  P=[P,zeros(1,nq-np)];
 end
 R=P+Q;
```

5. Ecrivez une fonction `poly_mult(P, Q)` qui renvoie la multiplication des polynômes P et Q (c'est un peu plus difficile que la somme, et vous n'échapperez probablement pas aux boucles `for`).
Remarque : En fait cette fonction existe déjà en *Matlab*. Elle s'appelle `conv` (c'est la *convolution* de deux tableaux). Sachez-le pour éventuellement l'utiliser directement plus tard, mais pour des raisons pédagogiques on va quand même la ré-écrire ici.

Réponse :

```
function R=poly_mult(P,Q)
 np=size(P,2);
 nq=size(Q,2);
 R=zeroes(1,np+nq);
 for i=1:np
  for j=1:nq
   R(i+j-1)=R(i+j-1)+P(i)+Q(j);
  end
 end
```

6. Ecrivez une fonction `poly_exp(P, n)` qui renvoie l'exponentiation P^n du polynôme P.

Réponse :

```
function R=poly_exp(P,n)
R=[1];
for i=1:n
 R=poly_mult(R,P);
end
```

Exercice 2. *Des bêtes de somme*

Vous avez vu en cours les formules suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

On va maintenant écrire un programme qui généralise ces formules et calcule, sur l'entrée p, le polynôme

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$$

Remarque : On triche un peu ici en admettant sans le prouver que S_p est toujours un polynôme, et qu'on sait même qu'il est de degré $(p+1)$.
L'idée consiste alors à chercher un polynôme P vérifiant la condition

$$P(X+1) - P(X) = X^p \qquad (1)$$

1. Si l'on trouve un polynôme P vérifiant la condition (1), comment peut-on en déduire S_p ? Expliquez pourquoi on peut supposer que le coefficient constant de P est nul.

On suppose maintenant que [1]

$$P(X) = \sum_{i=1}^{p+1} a_i X^i$$

On peut alors réécrire l'équation (1) en

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_i (X+1)^i - \sum_{i=1}^{p+1} a_i X^i = X^p \tag{2}$$

Par la magie des polynômes (et le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux), on peut transformer l'égalité précédente en un système d'équations linéaires où chaque équation correspond à un degré : on calcule le coefficient de degré i du gros paquet de gauche et on dit qu'il doit être égal au coefficient de degré i du polynôme X^p.

2. Dans le cas $p = 1$, montrez que l'équation (2) devient (après développement et simplification)

$$2a_2 X + a_1 + a_2 = X$$

ce qui se ramène au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a_2 & = & 1 \\ a_1 + a_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si l'on veut automatiser le processus, on doit calculer successivement $(X+1)$, $(X+1)^2$, ..., $(X+1)^{p+1}$. Ceci nous permettra de trouver les degré et les coefficients correspondant à chacun des a_i.
Par exemple pour trouver la solution pour $p = 3$, on procède de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcccccccccc} a_4(X+1)^4 & = & a_4X^4 & + & 4a_4X^3 & + & 6a_4X^2 & + & 4a_4X & + & a_4 \\ a_3(X+1)^3 & = & & & a_3X^3 & + & 3a_3X^2 & + & 3a_3X & + & a_3 \\ a_2(X+1)^2 & = & & & & & a_2X^2 & + & 2a_2X & + & a_2 \\ a_1(X+1)^1 & = & & & & & & & a_1X & + & a_1 \end{array}$$

On peut alors prendre les valeurs obtenues colonne par colonne (en fait degré par degré) pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} a_4 - a_4 & = & 0 & (X^4) \\ 4a_4 + a_3 - a_3 & = & 1 & (X^3) \\ 6a_4 + 3a_3 + a_2 - a_2 & = & 0 & (X^2) \\ 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 - a_1 & = & 0 & (X^1) \\ a_4 + a_3 + a_2 + a_1 & = & 0 & (X^0) \end{array} \right.$$

Le système peut alors être représenté par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. En utilisant la fonction `linsolve(A, Y)` de *Matlab* (qui trouve un vecteur X vérifiant $A \times X = Y$), résolvez le système obtenu. En déduire la formule calculant $S_3(n)$.

4. De manière générale, écrivez une fonction qui sur l'entrée p renvoie une formule calculant $S_p(n)$.
Indication : Commencez par créer la matrice qui décrit le système d'équations, résolvez le système linéaire et calculez S_p en fonction des coefficients de P.

5. À l'aide de la fonction `roots` (qui renvoie les racines d'un polynôme), trouvez la forme factorisée de $S_3(n)$.

1. On fait commencer la somme à 1 puisque le coefficient a_0 est nul...