

# TD1 - Relations, opérations binaires, mots et langages

**Exercice 1:** On considère l'opération suivante, définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$x \oplus y = xy + 2x + 2y + 2$$

Prouver que cette opération fait de  $\mathbb{R}$  un monoïde, et identifier l'élément neutre.

---

**Exercice 2:**

1. Prouver que  $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$  est un semianneau.
  2. Prouver que  $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \sqcap, \emptyset, \{\varepsilon\})$  est un semianneau.
  3. Est-ce que l'opération  $\cdot$  est distributive par rapport à  $\sqcap$  ? et l'inverse ?
- 

**Exercice 3:**

1. Prouver que  $(\Sigma^*, \preceq)$  est un ordre partiel.
  2. Est-ce que toute paire de mots  $(w_1, w_2)$  possède un infimum (plus petit élément) par rapport à  $\preceq$  ? Est-ce qu'elle possède un plus grand élément ?
  3. Mêmes questions pour les relations *infix* et *sous-mot* ( $\sqsubseteq$ ).
- 

**Exercice 4:** Considérons la relation  $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$  définie comme suit :

$$w_1 \sim w_2 \text{ ssi } \#_a(w_1) = \#_a(w_2)$$

1. Prouver que cette relation est une équivalence.
  2. Décrire la classe d'équivalence du mot  $aaa$  par une formule de premier ordre.
-