

TD1 - Relations, opérations binaires, mots et langages

Exercice 1: On considère l'opération suivante, définie sur \mathbb{R} :

$$x \oplus y = xy + 2x + 2y + 2$$

Prouver que cette opération fait de \mathbb{R} un monoïde, et identifier l'élément neutre.

Exercice 2:

1. Prouver que $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ est un semianneau.
 2. Prouver que $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, \sqcap, \emptyset, \{\varepsilon\})$ est un semianneau.
 3. Est-ce que l'opération \cdot est distributive par rapport à \sqcap ? et l'inverse ?
-

Exercice 3:

1. Prouver que (Σ^*, \preceq) est un ordre partiel.
 2. Est-ce que toute paire de mots (w_1, w_2) possède un infimum (plus petit élément) par rapport à \preceq ? Est-ce qu'elle possède un plus grand élément ?
 3. Mêmes questions pour les relations *infix* et *sous-mot* (\sqsubseteq).
-

Exercice 4: Considérons la relation $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$ définie comme suit :

$$w_1 \sim w_2 \text{ ssi } \#_a(w_1) = \#_a(w_2)$$

1. Prouver que cette relation est une équivalence.
 2. Décrire la classe d'équivalence du mot aaa par une formule de premier ordre.
-