Langages formels et automates – cours 2

Automates : définitions et propriétés élémentaires

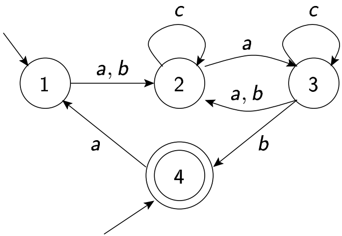
Catalin Dima

Automate – définitions

Automate = quintuplet $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, Q_f)$:

- Alphabet fini Σ.
- Ensemble fini d'états Q.
- Relation de transition $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.
- Ensemble d'états initiaux Q_0.
- Ensemble d'états finaux Q_f.

Peut être vu comme un graphe étiqueté par Σ :



$$\Sigma = \{a, b, c\}, Q = \{1, 2, 3, 4\}, Q_0 = \{1, 4\}, Q_f = \{4\}$$

$$\delta = \left\{1 \xrightarrow{a} 2, 1 \xrightarrow{b} 2, 2 \xrightarrow{a} 3, 2 \xrightarrow{c} 2, \ldots\right\}$$

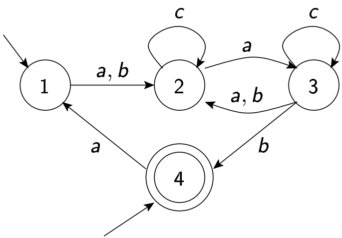
Trajectoires et acceptation

- Trajectoire dans un automate : suite de transitions connectés.

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \xrightarrow{a_3} \dots \xrightarrow{a_k} q_k = \left(q_{i-1} \xrightarrow{a_i} q_i\right)_{1 \leq i \leq k}$$

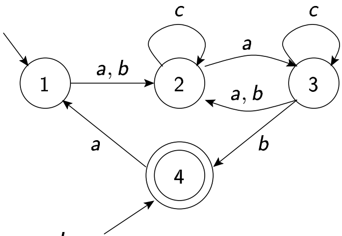
- Mot associé à une trajectoire = concaténation des étiquettes : $a_1 a_2 a_3 \dots a_k$.
- Trajectoire acceptante = trajectoire qui démarre en Q_0 et s'arrête en Q_f : $q_0 \in Q_0, q_k \in Q_f$.
- Mot accepté = concaténation des étiquettes d'une trajectoire acceptante :

Trajectoires – exemples



- Trajectoire : $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 3$.
- Pas trajectoire : $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 3$.
- Trajectoire acceptante : $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 4$.
- Mot accepté (par cette dernière) : $acab$.
- D'autres exemples ?
- Est-ce que le mot vide, ε est accepté par cet automate ?
  - Oui ! il est associé à une trajectoire composée d'un seul état, sans transitions !

Acceptation



- Reprenons le mot *acab*.
- Deux trajectoires lui sont associés

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 4$$

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$$

- La première est acceptante, la deuxième non.
- Le mot est accepté car *au moins une des trajectoires qui lui sont associées est acceptante* !
- Qu'en est-il de *acabab* ? Combien de trajectoires lui sont associées ?
- Et pour *aaabaaabab* ?

Langage d'un automate

Langage = ensemble de mots acceptés par un automate.

- Ensemble des concaténation des étiquettes des chemins menant d'un état initial à un état final.

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ accepté par } \mathcal{A}\}$$

- Le but principal de la définition des automates !
  - Outil de représentation finie des ensembles de mots infinis.
  - Outil de preuve de propriétés de langages : égalité, inclusion, diverses transformations.
- La classe des Langage réconnaissable = la classe des langages de tous les automates finis.

$$Rec = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \exists \mathcal{A} \text{ automate fini t.q. } L = L(\mathcal{A})\}$$

- Bcp. de problèmes de type : "voici un langage, est-il dans *Rec* ?
  - *Preuve* = construire $\mathcal{A}$ pour lequel $L = L(A)$.
  - *Prouver* que la construction est bonne !

Modélisation des programmes

Programme $\longrightarrow$ automate, une première possibilité :

- États = instructions (étiquettes).
- Alphabet = affectation des valeurs aux variables.

```
start: if (x=1) y=1;
          else y=x+1;
end:
```

Modélisation des programmes

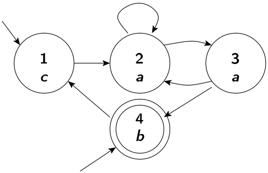
Autre possibilité :

- États = affectation des valeurs aux variables.
- Transitions sans étiquette.

Automates de Moore

$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, \lambda, Q_0, Q_f)$.

- Q, Q_0, Q_f, Σ comme d'habitude.
- Étiquetage des états : $\lambda : Q \longrightarrow \Sigma$.
- Transitions : $\delta \subseteq Q \times Q$.

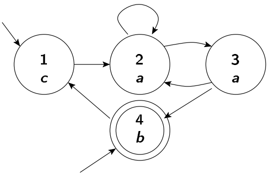


Automates de Moore

- Trajectoire dans un automate de Moore : suite de transitions connectés.

$$q_0 \longrightarrow q_1 \longrightarrow q_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow q_k = \left(q_{i-1} \longrightarrow q_i\right)_{1 \leq i \leq k}$$

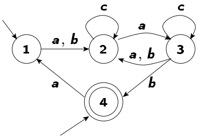
- Mot associé à une trajectoire = concaténation des étiquettes des états sur la trajectoire $a_1 a_2 a_3 \dots a_k$.
- Trajectoire acceptante et mot accepté : même définition.

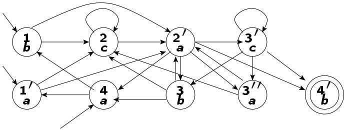


- Trajectoire : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$, mot associé = ...
- Trajectoire acceptante : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$, mot associé = ...
- Est-ce qu'on accepte le mot *bcaaaab* ? Et *bcb* ? Et ε ?

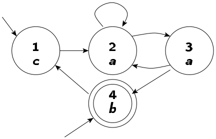
Transformations

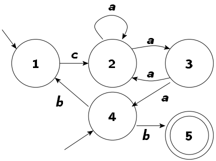
- Un automate étiqueté sur les transitions – automate type Mealy.
- Mealy $\longrightarrow$ Moore : les transitions deviennent des états.
  - Quels états seront déclarés comme initiaux ? et finaux ?





- Moore $\longrightarrow$ Mealy : pareil !





- **Construction formelle en cas général !**
- **Preuves !**

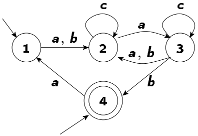
Exemples

- $L_1 = \{ab, baa, abcca, bbcc\}$.
- $L_2 = \{ab\}^*$.
- $L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ commence en a et se termine en $b\}$.
- $L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w)$ est un multiple de $3\}$
- $L_5 = \{w \in \{a, b\}^* \mid$
  $\#_a(w)$ est un multiple de 3 et $\#_b(w)$ est un multiple de $4\}$.
- $L_6 = \{w \in \{0..., 9\} \mid w$ est un multiple de $3\}$.
- $L_7 = \{w \in \{0, 1\} \mid w$ se divide par $11\}$.

Nondéterminisme et déterminisme

Trois sources de nondéterminisme :

- Plusieurs états initiaux.
- D'un état, avec la même lettre, on a plusieurs états "destinations".



- Possibilité d'avoir des ε-transitions (on les verra).

Automate déterministe :

- Pour chaque état q et chaque symbole a, au maximum une seule transition sortante de q étiquetée avec a.
- Et en plus un seul état initial et pas d'ε-transitions !
- $L_8 = \{w \in \{a, b\} \mid w \text{ contient la séquence } ab\}$.
  - Donner un automate nondéterministe.
  - Donner un automate déterministe.

Nondéterminisme et déterminisme

- Dans un automate nondéterministe, un mot peut être associé à plusieurs trajectoires.
- Dans un automate déterministe, un mot est associé à zéro ou une trajectoire(s).
- On peut généraliser cette définition pour les automates de Moore :
  - D'un état q on ne peut avoir deux transitions vers deux états r, r' distincts, tous les deux étiquetés par le même symbole :

$$\forall q, r, r' \in Q, (q, r), (q, r') \in \delta \wedge \lambda(r) = \lambda(r') \Rightarrow r = r'$$

  - Il y a au plus un seul état initial étiqueté avec chaque symbole :

$$\forall q, q' \in Q_0, \lambda(q) = \lambda(q') \Rightarrow q = q'$$