TD de théories des graphes n^{o}2

1. Soit G un graphe non orienté d'ordre n tel que G a au moins n arêtes. Montrer qu'alors G a un cycle (*indication : raisonner par récurrence sur* n). Montrer par un exemple (très simple) que la réciproque est fausse.

2. Soit G un graphe non orienté simple d'ordre $n \geq 2$ tel que le degré minimum de ses sommets est supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Montrer que G est connexe. (*Indication : montrer par l'absurde que pour tout couple de sommets* (x, y) *si* x *et* y *ne sont pas adjacents alors il existe un sommet* z *adjacent à* x *et* y).

Montrer que pour chaque entier pair $n \geq 2$, il existe un graphe non orienté simple d'ordre n **non connexe** dont le degré minimum des sommets est égal à $\frac{n-2}{2}$.

3. Montrer qu'une arête e d'un graphe G non orienté est un isthme ssi e n'est contenue dans aucun cycle de G.

4. Soit G un graphe (orienté ou non). Expliquer ce que doit faire cet algorithme, pourquoi il n'est pas correct puis corriger le :

procedure Acc(x, G)
    pour tout sommet y adjacent à x faire
        écrire(y);
        Acc(y, G);
    fin pour

Quelle est la complexité de l'algorithme corrigé ?

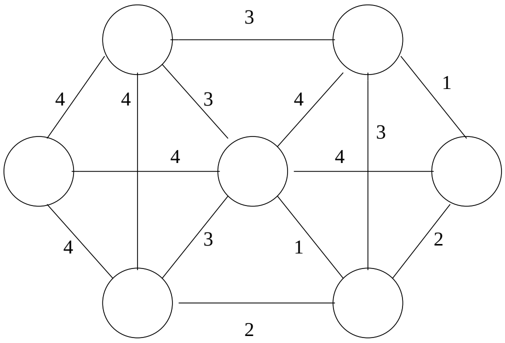
5. Trouver un algorithme qui détermine la présence de cycle ou de circuit dans un graphe.

6. Déterminer pour le graphe G ci-dessous un arbre couvrant minimal en appliquant les algorithmes de Kruskal et de Prim. Détailler les étapes de construction de l'arbre.

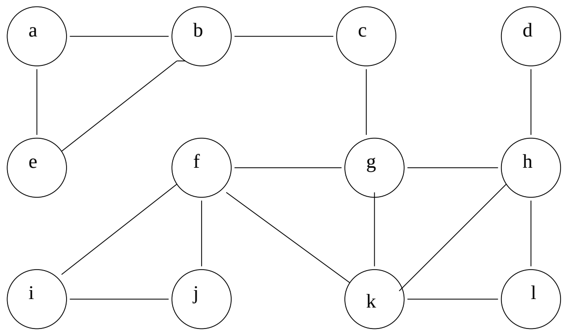
7. Déterminer les points d'articulation du graphe H ci-dessous.

8. Soit D le graphe simple dont les sommets sont $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et dont les arêtes sont pondérées par la fonction suivante : $p(i, j) = |i + j|$. Déterminer un arbre couvrant minimal de D en appliquant les algorithmes de Kruskal et de Prim. Détailler les étapes de construction de l'arbre.

Figures : (voir au recto)



G



H