Corrigé de l'examen de théorie des graphes 2010-2011

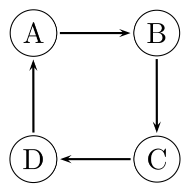
durée 2h – sans document – 2 pages

1. (2 points) *Dans un graphe orienté, on rappelle les définitions suivantes*

- *une source est un sommet de degré entrant nul (il n'est successeur d'aucun sommet)*
- *une racine est un sommet tel qu'il existe un chemin depuis la racine vers chacun des autres sommets.*

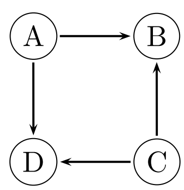
1.1 *Une racine est-elle nécessairement une source ?*

Non dans un circuit du type *abcda*, chaque sommet est une racine sans être une source.



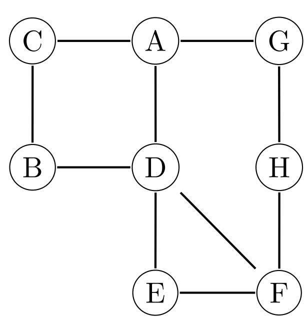
1.2 *Une source est-elle nécessairement une racine ?*

Non car il peut y avoir plusieurs sources et aucun chemin ne permet de joindre une source à une autre source. Ici A et C sont deux sources, mais pas des racines.



2. (3 points) *Déterminez un graphe non orienté connexe dont les ordres de visite respectant l'ordre alphabétique sont*

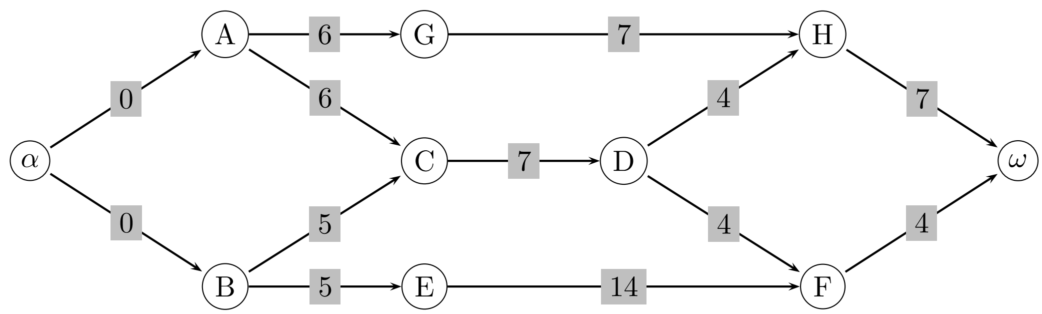
- *a, c, b, d, e, f, h, g pour son parcours en profondeur*
- *a, c, d, g, b, e, f, h pour son parcours en largeur.*



3. (5 points) *Un projet informatique a été découpé en 8 sous-programmes A, B, C, D, E, F, G, H. Les contraintes de précédence et les durées de développement de ces sous-programmes sont données dans le tableau suivant*

sous-programme	durée	sous-programmes précédents
A	6	
B	5	
C	7	A, B
D	4	C
E	14	B
F	4	D, E
G	7	A
H	7	D, G

3.1 *Modélisez ce projet par un graphe. Déterminez la durée minimale du projet, les dates au plus tôt, dates au plus tard des différents sous-programmes. Quels sont les "sous-programmes" critiques ?*



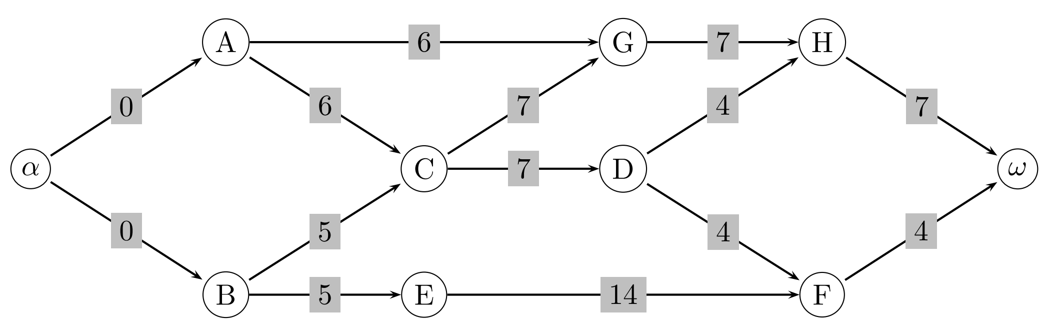
Le calcul des dates au plus tôt et au plus tard donne

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	ω
date au plus tôt	0	0	6	13	5	19	6	17	24
date au plus tard	0	1	6	13	6	20	10	17	24

Les tâches critiques sont dans l'ordre A, C, D, H et le projet dure 24.

3.2 *Le développeur en charge du sous-programme G est indisponible; celui en charge du sous-programme C prend alors son travail* ***à la suite*** *du sien. Quelle sera alors la durée minimale du projet? Les sous-programmes critiques sont-ils les mêmes?*

Le graphe devient alors



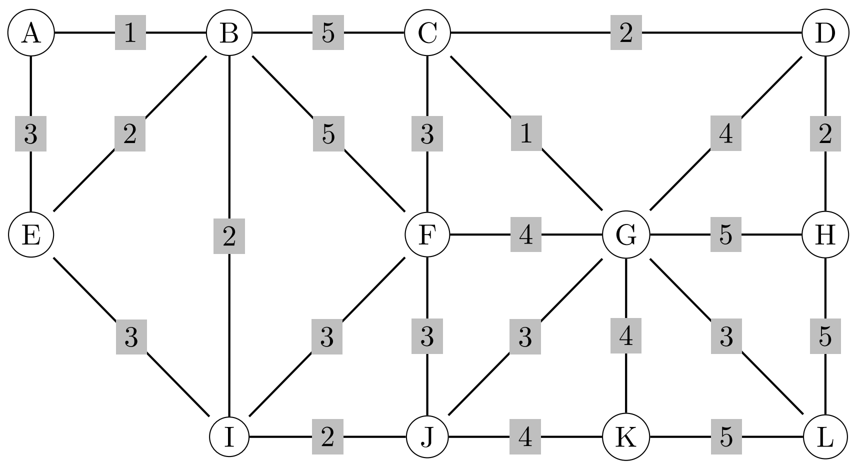
Le calcul des dates au plus tôt et au plus tard donne alors

Tâches	A	B	C	D	E	F	G	H	ω
date au plus tôt	0	0	6	13	5	19	13	20	27
date au plus tard	0	1	6	16	6	23	13	20	27

Le projet dure alors 27 et les tâches critiques sont dans l'ordre A, C, G, H

4. (5 points) *On veut construire un réseau avec un coût minimum pour relier 12 commutateurs. Les coûts de câblage sont donnés par le graphe $\mathcal{G}$. Suite à une décision politique les liaisons câblées GH et AE sont imposées. Déterminer alors un câblage à coût minimal respectant ces contraintes. (Vous préciserez l'algorithme utilisé, l'adaptation de cet algorithme au cas précis de l'exercice et enfin son application étape par étape.)*

$\mathcal{G}$

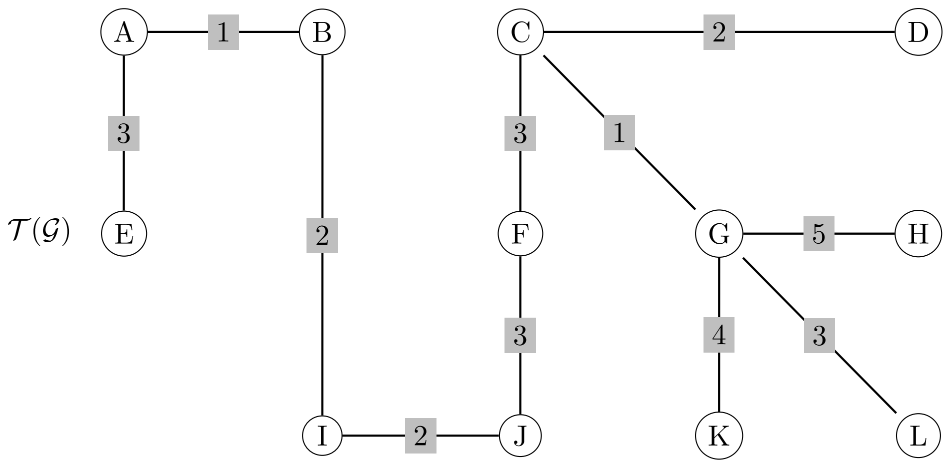


On va appliquer l'algorithme de Kruskal parce que la contrainte imposée porte sur un choix d'arêtes et non de sommets.

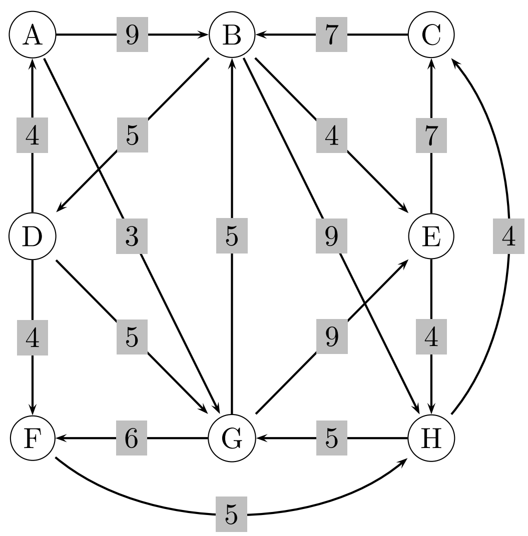
La modification à apporter est la suivante : à l'iniatialisation

- l'ensemble des arêtes choisies est initialisé à $\{AE, GH\}$ et non pas à $\emptyset$.
- l'ensemble des arêtes triées par ordre croissant de coût contient au départ toutes les arêtes sauf GH et AE.

On choisit alors dans l'ordre **AE,GH**, $AB, CG, BI, IJ, CD, CF, JF, GL, GK$



5. (5 points) *Le graphe suivant représente des temps de vol (en heures) de liaisons aériennes entre 8 aéroports.*



5.1 *Déterminer les trajets les plus rapides depuis A vers chacune des 7 autres villes. (Vous préciserez l'algorithme utilisé et les étapes de son application)*

On peut appliquer indifféremment Dijkstra ou Bellman puisque les valeurs des arcs sont positives. L'algorithme de Dijksta donne

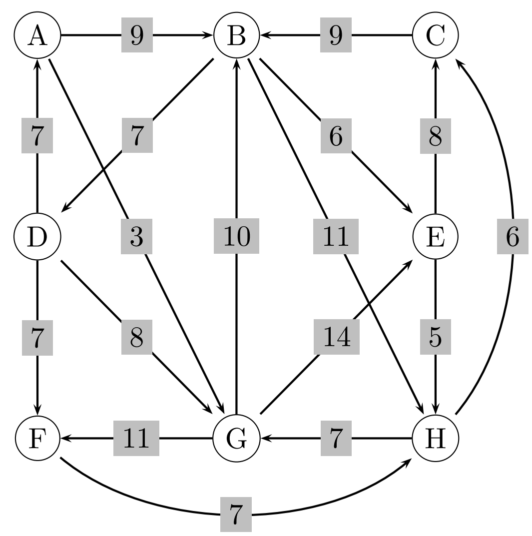
A	B	C	D	E	F	G	H	$\mathcal{C}$
0	9^A	∞	∞	∞	∞	3^A	∞	**A**
0	8^G	∞	∞	12^G	9^G	3^A	∞	A,**G**
0	8^G	∞	14^B	12^G	9^G	3^A	17^B	A,G,**B**
0	8^G	∞	14^B	12^G	9^G	3^A	14^F	A,G,B, **F**
0	8^G	19^E	14^B	12^G	9^G	3^A	14^F	A,G,B,F **E**
0	8^G	19^E	14^B	12^G	9^G	3^A	14^F	A,G,B,F,E **D**
0	8^G	18^H	14^B	12^G	9^G	3^A	14^F	A,G,B,F,E,D **H**
0	8^G	18^H	14^B	12^G	9^G	3^A	14^F	A,G,B,F,E,D,H **C**

5.2 *On impose maintenant un temps d'escale dans chaque aéroport selon le tableau suivant*

aéroport	B	C	D	E	F	G	H
temps d'escale	2h	2h	3h	1h	2h	5h	2h

Que doit-on modifier sur le graphe ? Quel est le trajet le plus rapide depuis A vers H ?

A chaque passage par une escale, le temps d'escale s'ajoute au trajet que l'on va effectuer depuis cette escale. Il suffit donc d'ajouter aux arcs d'origine X le temps d'escale affecté à X pour $X \in \{B, C, D, E, F, G, H\}$. On a le nouveau graphe suivant



L'algorithme de Dijksta donne

A	B	C	D	E	F	G	H	$\mathcal{C}$
0	9^A	∞	∞	∞	∞	3^A	∞	**A**
0	9^A	∞	∞	17^G	14^G	3^A	∞	A,**G**
0	9^A	∞	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,**B**
0	9^A	∞	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,B, **F**
0	9^A	23^E	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,B,F **E**
0	9^A	23^E	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,B,F,E **D**
0	9^A	23^E	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,B,F,E,D **H**
0	9^A	23^E	16^B	15^B	14^G	3^A	20^B	A,G,B,D,E,D,H **C**

Le trajet le plus rapide de A vers H est A, B, H.