TD n^{o}1 et sa correction

1. Un graphe G d'ordre 7, à 10 arêtes a six sommets de degré a et un sommet de degré b. Que valent a et b ? De plus, si l'on considère que G est simple que vaut b ?
corrigé : on sait que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égal au double de son nombre d'arêtes soit ici $6a + b = 20$. a et b étant des entiers naturels on a les couples de solutions suivants $(a, b) \in \{(0, 20), (1, 14), (2, 8), (3, 2)\}$. De plus si G est simple alors le degré d'un sommet est strictement inférieur à l'ordre du graphe, il ne reste alors que la solution $a = 3, b = 2$.

2. Soit G un graphe d'ordre 12, à 14 arêtes dont les sommets sont de degré 2 ou 3. Combien G a-t-il de sommets de degré 2 ?
corrigé : soient x le nombre de sommets de degré 2 et y le nombre de sommets de degré 3 ; on sait que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égal au double de son nombre d'arêtes soit ici $2x + 3y = 28$. De plus l'ordre du graphe est égal à 12 soit ici $x + y = 12$. On résout donc le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 12 \\ 2x & + & 3y & = & 28 \end{array}\right. \text{ ce qui donne } \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 8 \\ y & = & 4 \end{array}\right.$$

3. Vous invitez 5 personnes. A chacune vous demandez combien d'invités elle connaît. Vous obtenez 5 réponses différentes. Est-ce possible ?
corrigé : voir exercice

4. Montrer que parmi 6 personnes, il y en a au moins 3 qui se connaissent mutuellement ou au moins 3 qui ne se connaissent pas mutuellement. (par mutuellement on entend deux à deux)
corrigé : Soit x une personne : parmi les 5 autres on a les cas suivants
- elle en connait au moins 3 : soit parmi ces trois personnes au moins deux se connaissent et on a 3 personnes (avec x) qui se connaissent mutuellement, soit aucune des trois ne connait une 2 des autres et on a 3 personnes ne se connaissant pas deux à deux
- elle en connait au plus deux : il reste alors 3 personnes qui ne connaissent pas x ; parmi des 3 personnes ou bien au moins deux ne se connaissent pas et on a 3 personnes (avec x) ne se connaissant pas deux à deux, ou bien elles se connaissent toutes les trois deux à deux.

5. Montrer que tout graphe non orienté simple d'ordre n, $n \geq 2$ a au moins deux sommets de même degré.
corrigé : par l'absurde, supposons que tous les sommets aient des degrés deux à deux distincts ; alors, le graphe étant simple, chaque degré est dans $\{0, \cdots, n-1\}$ et la seule possibilité d'avoir n degrés deux à deux distincts choisis dans $\{0, \cdots, n-1\}$ est d'avoir les degrés $0, 1, \cdots, n-1$: en particulier il y a un sommet isolé et un sommet adjacent à chacun des autres sommets ce qui est contradictoire.

6. Un graphe non orienté simple d'ordre 4 peut-il avoir trois sommets de degré 3 et un sommet de degré 1 ?

corrigé : remarquons tout d'abord que tout sous-graphe d'un graphe simple est lui-même simple. Supposons donc qu'un tel graphe G existe, soit alors x le sommet de degré 1 et considérons $G - x$: c'est un sous-graphe de G donc simple, d'ordre 3 ; de plus puisque l'on a retiré un seule arête de G seulement deux sommets ont vu leur degré diminuer et donc au moins un des trois sommets de degré 3 dans G reste de degré 3 dans $G - x$ ce qui contredit que $G - x$ est simple d'ordre 3.

7. On dit qu'une suite d'entiers naturels $k_1, \cdots, k_n$ est graphique s'il existe un graphe non orienté simple d'ordre n tel que ses sommets $x_1, \cdots, x_n$ ont respectivement les degrés $k_1, \cdots, k_n$. Les suites ci-dessous sont-elles graphiques ?

- $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0$
- $7, 6, 2, 2, 2, 1, 0, 0$
- $5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1$
- $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$

Montrer que pour tout $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ la suite $x, 1, 2, 3, 5, 5$ n'est pas graphique.

corrigé : • $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 0, 0$ est graphique si et seulement si $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 1$ est graphique (voir dessin1)

• $7, 6, 2, 2, 2, 1, 0, 0$ est graphique si et seulement si $7, 6, 2, 2, 2, 1$ est graphique or dans un graphe simple d'ordre 6, les degrés des sommets sont inférieurs à 5. Donc $7, 6, 2, 2, 2, 1, 0, 0$ n'est pas graphique.

• $5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1$ est graphique (voir dessin1)

• $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1$ n'est pas graphique car il y a un nombre impair de sommets de degré impair.

Sachant que l'ordre est 6, cette suite a deux sommets (de degré 5) adjacents à tous les autres sommets : donc tous les sommets sont au moins de degré 2.

Théorème 1 (**Havel-Hakimi**) : *une suite* **décroissante** *d'entiers naturels $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ avec $n \geq 2$ et $k_1 \geq 1$ est graphique ssi la suite $k_2 - 1, k_3 - 1, \cdots, k_{k_1+1} - 1, k_{k_1+2}, \cdots k_n$ est graphique. (on a supprimé k_1 puis on a retranché 1 aux k_1 premiers termes)*

Ce théorème fournit un algorihtme pour déterminer si une suite est graphique ou non. (cherchez les cas de base)

8. Dessiner un graphe non orienté simple dont l'ensemble des degrés des sommets est $\{0, 4, 5\}$.

corrigé : voir dessin 2

9. Le complément d'un graphe non orienté simple $G = (X, E, \varphi)$ est le graphe $G^c = (X, E^c, \varphi_c)$ tel que deux sommets sont adjacents dans G^c ssi ils ne sont pas adjacents dans G.

9.1 Comment formuler le problème de l'exercice en terme de graphe utilisant la notion de graphes complémentaires.

corrigé : Soit G d'ordre 6. G ou G^c contient un triangle (trois sommets deux à deux adjacents)

preuve : soit x un sommet de G ; x a au moins trois voisins dans G ou dans G^c par définition de G^c. Supposons que x a trois voisins y_1, y_2, y_3 dans G : ou bien deux des trois sommets y_1, y_2, y_3 sont adjacents et on a un triangle avec x dans G, ou bien aucun n'est adjacent aux deux autres et on a un triangle y_1, y_2, y_3 dans G^c.

9.2 Un graphe G non orienté simple est dit autocomplémentaire si G est isomorphe à G^c. Montrer que si G, d'ordre n, est autocomplémentaire alors $n \equiv 0\, ou\, 1 \; modulo\, 4$.

corrigé : si G est isomorphe à G^c alors G et G^c ont le même nombre d'arêtes m ; de plus le nombre maximal d'arêtes d'un graphe non orienté simple d'ordre n étant $\frac{n(n-1)}{2}$, par définition de l'autocomplémentarité, $2p = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $p = \frac{n(n-1)}{4}$ est un entier. Sachant que n et $n-1$ sont premiers entre eux on a soit $n \equiv 0\, modulo\, 4$ soit $n \equiv 1\, modulo\, 4$.

10. Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Le graphe de Petersen est le graphe non orienté défini comme suit : les sommets sont les paires déléments de A et xy est une arête ssi $x \cap y = \emptyset$. Par exemple $\{01\}$ et $\{23\}$ sont adjacents et $\{01\}$ et $\{13\}$ ne sont pas adjacents.

Déterminer l'ordre de ce graphe, le degré de chaque sommet, le nombre d'arêtes et le diamètre de ce graphe.

Dessiner ce graphe. Est-il planaire ? Quel est son nombre chromatique ?

corrigé : l'ordre est $C_5^2 = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ car un sommet est une paire déléments choisis parmi 5.

Soit $p, q \in A$, $p \neq q$. (p, q) est un sommet et est exactement adjacent à tout sommet formé d'une paire déléments choisis parmi $A - \{p, q\}$ donc (p, q) est adjacent à $C_3^2 = 3$ sommets et son degré est donc égal à 3.

Sachant que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égal au double de son nombre d'arêtes, on a $3 \times 10 = 2m$ soit $m = 15$ arêtes.

Soit $p, q, u, v \in A$ tels que (p, q) et (u, v) soient deux sommets distincts : s'ils ne sont pas adjacents alors on a par exemple $p = u$; soit alors (i, j) le sommet tel que $i, j \in A - \{p, q, v\}$. (i, j) est adjacent à (p, q) et à (u, v) : donc la distance entre (p, q) et (u, v) est deux donx le diamètre est 2.

Son nombre chromatique est 3 et il n'est pas planaire. Voir dessin 2.

11. Un chimiste veut transporter des produits chimiques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{X}$ dans des caisses. Mais certains produits ne peuvent se côtoyer sous peine de réaction dangereuse : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ réagissent entre eux, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ réagissent chacun avec $\mathcal{F}$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{X}$ réagit avec $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$. Trouver le nombre minimal de caisses nécessaires au transport.

corrigé : on trace le graphe d'ordre 7 dont les sommets sont les produits chimiques et dont une arête relie deux produits qui réagissent ; le nombre minimal de caisses (et la répartition des produits dans ces caisses) est donné par une coloration minimale de ce graphe d'incompatibilité. Ici c'est 3 (par exemple, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$,$\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$).

12. Un commissariat doit effectuer 8 surveillances selon des horaires fixés par le tableau suivant

surveillance n^o	1	2	3	4	5	6	7	8
début	5	15	8	7	3	13	11	19
fin	10	18	18	12	14	21	20	23

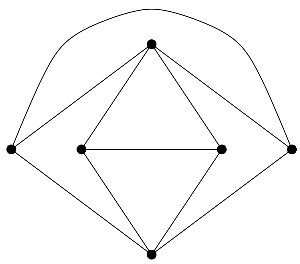
Quel sera le nombre minimal de policiers nécessaires ? (remarque : dans les horaires de début et de fin sont comptabilisées les déplacements depuis ou bien jusqu'au commissariat).

corrigé : on trace le graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les surveillances et dont une arête relie deux surveillances dont les plages horaires se chevauchent. Le nombre minimal de policiers est donné par le nombre chromatique de ce graphe d'incompatibilité. Ici c'est 4 (1 et 4 et 6, 2 et 5, 3 et 8, 7). On remarque les sommets 3,5,6,7 sont deux par deux adjacents.

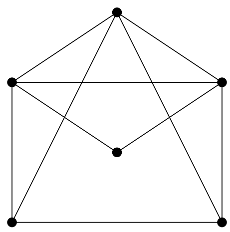
13. Soit G un graphe non orienté simple d'ordre n. Montrer que si G est biparti alors $m \leq \dfrac{n^2}{4}$.
corrigé : soit $p < n$ l'ordre d'une partie de G biparti ; l'autre partie est d'ordre $n-p$. Le nombre maximal d'arêtes est alors $p(n-p)$ lorsque chaque sommet d'une partie est adjacent à tous les sommets de l'autre partie. Donc $m \leq p(n-p)$; or une étude de la fonction réelle $x \mapsto n(n-x)$ montre que son maxima est atteint pour $x = \frac{n}{2}$ donc $m \leq p(n-p) \leq \frac{n}{2}(n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4}$.

14. Trouver une représentation planaire du graphe $K_5 - e$ où e est une arête quelconque de K_5.
corrigé : voir dessin 2.

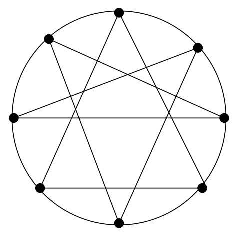
15. Soit $\chi(G)$ le nombre chromatique d'un graphe simple. L'algorithme glouton de coloration des sommets consiste à suivre une liste des sommets et à les colorier dans l'ordre avec le plus petit entier disponible. Appliquer le sur les graphes suivants :



G



H



Γ

Cet algorithme donne-t-il toujours le nombre chromatique ? voir figure 3

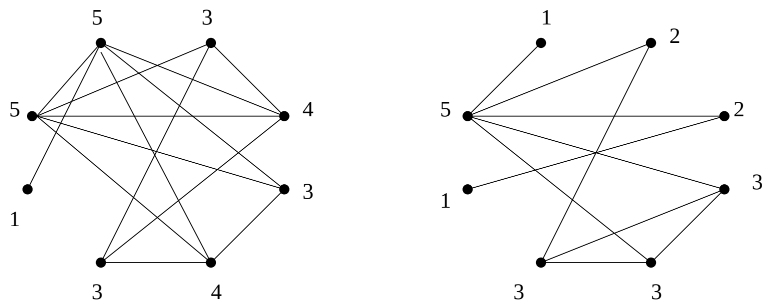
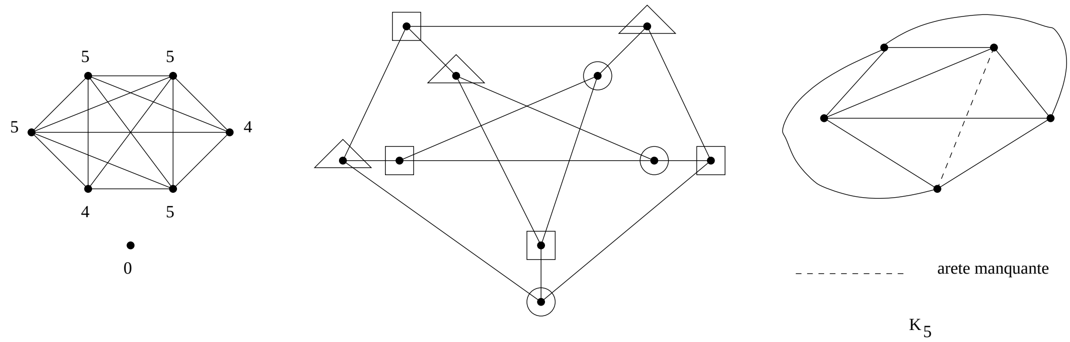
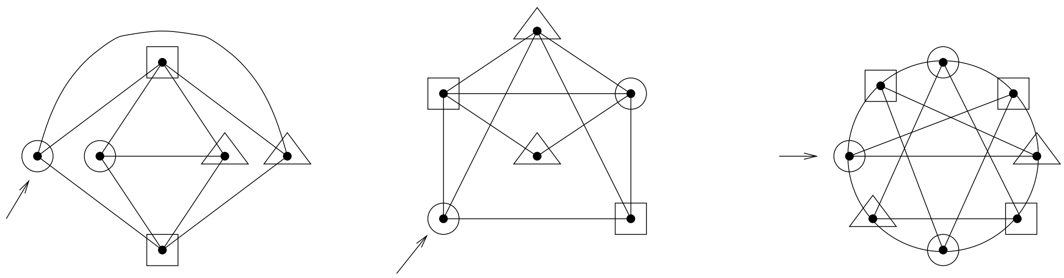


FIG. 1 –



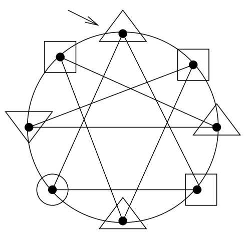
graphe de Petersen

FIG. 2 –



G H Γ

l'ordre choisi est le sens des aiguilles d'une montre, de l'exterieur vers l'interieur en partant du sommet fleché



ici l'algorithme ne donne pas le nombre chromatique

FIG. 3 –