

Option Mathématiques pour l’informatique — Correction — Janvier 2008

durée 1h30 - sujet de 2 pages - sans document

Les parties sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre désiré

les réponses doivent être justifiées

1. Ensembles et Fonctions – Récursion – Induction

1.1 Quel est le cardinal de $\mathbb{B}^4$?

réponse : $2^4 = 16$ (cf.cours)

1.2 Quel est le nombre d’applications de l’ensemble $\mathbb{B}^4$ dans l’ensemble $\mathbb{B}$?

réponse : 2^{2^4}

1.3 Soit $\mathcal{E} = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$ l’ensemble des suites finies de 0 et de 1. On définit inductivement le sous-ensemble $\mathcal{L}$ de la façon suivante :

- $0 \in \mathcal{L}, 1 \in \mathcal{L}$
- si $x \in \mathcal{L}$ alors $1x0 \in \mathcal{L}$ et $00x1 \in \mathcal{L}$

Donner tous les éléments de $\mathcal{L}$ de longueur 6 (ayant 6 "chiffres" au total).

réponse : les premiers éléments sont

0, 1, 100, 110, 0001, 0011, 11000, 11100, 100010, 100110, 001001, 001101, 0000011, 0000111,

Donc les éléments de longueur 6 sont 100010, 100110, 001001, 001101.

2. Calcul Booléen et Logique

2.1 Soit $(E, 0, 1, +, \cdot, ^-)$ une algèbre de Boole. Montrer que pour tout $x, y \in E$,

$$\text{si } x \cdot y = x \text{ alors } x + y = y$$

réponse : $x + y = (x \cdot y) + y = (x \cdot y) + (1 \cdot y) = (x + 1) \cdot y = 1 \cdot y = y$

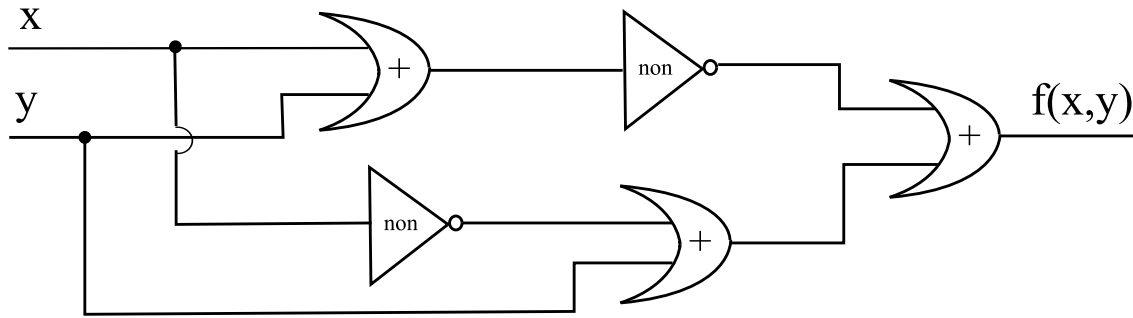
2.2 A quelle fonction booléenne f correspond ce circuit ? Simplifiez f et construisez le circuit correspondant avec 2 portes seulement.

réponse : $f(x, y) = \overline{(x + y)} + (\overline{x} + y) = (\overline{x} \cdot \overline{y}) + \overline{x} + y = (\overline{x} \cdot \overline{y}) + (\overline{x} \cdot 1) + y = \overline{x} \cdot (y + 1) + y = \overline{x} + y$

Donc on a besoin d’une porte NON et d’une porte OU.

2.3 Suite à un vol on a trouvé la trace de 2 personnes : on sait qu’il y a deux coupables. Mais il y a trois suspects A, B, C. On recueille deux témoignages qui sont fiables :

– si A est coupable alors C n’est pas coupable



– si C n’est pas coupable alors B non plus.

On pose a = ”A est coupable”, b = ”B est coupable” et c = ”C est coupable”. Traduire les témoignages par deux formules. En déduire les 2 coupables.

réponse : le premier témoignage se traduit par la formule $\alpha = a \longrightarrow \neg c$ et le deuxième témoignage par la formule $\beta = \neg c \longrightarrow \neg b$.

On sait que α est fausse *si et seulement si* $a=c=1$ et β est fausse *si et seulement si* $b=1$ et $c=0$.

On cherche alors les cas pour lesquels les deux formules sont vraies et il reste les distributions suivantes $a=1, b=c=0$ - $a=0, b=c=0$ - $a=0, b=0, c=1$ - $a=0, b=1, c=1$. Parmi ces quatre cas possibles on ne garde que ceux qui correspondent à l’existence de deux coupables ; on ne retient que la solution $a=0, b=1, c=1$ soit B et C sont les coupables.

3. Notions d’algorithmes

3.1 On suppose que les entiers sont codés sur 8 bits en complément à deux.

Ecrire selon cette représentation le codage des entiers relatifs suivants : -68 et 53.

réponse : sur 8 bits en complément à deux $-68 \rightsquigarrow 10111100$ et $53 \rightsquigarrow 00110101$

A quelles valeurs en base dix correspondent les deux codages suivants : 11101000 01110001 ?

réponse : sur 8 bits en complément à deux on a $11101000 = -2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = -128 + 64 + 32 + 8 = -24$ et $01110001 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 1 = 113$

3.2 Une malle a une capacité limitée en poids : elle ne peut pas contenir plus de 200 kg. On suppose que l’on a n boîtes de poids respectif $p_1, \dots, p_n$. On veut mettre le plus possible de boîtes dans cette malle. On cherche un algorithme pour trouver **ce nombre maximum de boîtes**. Pour nous aider, on introduit la fonction F suivante :

$$F : \{0, 1\}^n \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_1 \times p_1 + \dots + x_n \times p_n$$

F calcule le poids d’une partie des boîtes, partie décrite par les valeurs $x_1, \dots, x_n$ de la façon suivante : si on prend la boîte i alors $x_i = 1$ sinon $x_i = 0$.

Remarquons que le nombre de boîtes prises est égal à $\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ que l’on notera $s(x_1, \dots, x_n)$.

On introduit de plus une variable $Nmax$ qui sera égale au nombre cherché une fois l’algorithme exécuté.

Compléter les pointillés - - - dans les lignes suivantes pour décrire un algorithme répondant au problème.

• $Nmax \leftarrow 0$

• **pour** chaque n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$

si $[F(x_1, \dots, x_n) < 200 \text{ et } s(x_1, \dots, x_n) > Nmax]$ **alors** $Nmax \leftarrow s(x_1, \dots, x_n)$ **fin si**

fin pour

En effet :

au début on n’a placé aucune boîte, on ne retient donc que $Nmax = 0$.

On examine ensuite une par une chaque possibilité de remplissage de la malle par des boîtes : c’est réalisé par **pour** chaque n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$.

Fixons alors un $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ (chaque x_i est fixé soit à 1 soit à 0).

On calcule le poids de ces boîtes : c’est réalisé par $F(x_1, \dots, x_n)$.

Son poids doit être inférieur au poids maximum permis 200 kg.

De plus on ne retient cette possibilité que si elle contient plus de boîtes que ce que l’on a retenu jusqu’à présent. Or le nombre de boîtes considérées est ici $s(x_1, \dots, x_n)$.

On doit donc comparer $F(x_1, \dots, x_n)$ à 200 et $s(x_1, \dots, x_n)$ à $Nmax$. C’est réalisé par $[F(x_1, \dots, x_n) < 200 \text{ et } s(x_1, \dots, x_n) > Nmax]$ (*).

Si ces deux comparaisons sont positives alors on retient le nombre de boîtes de cette possibilité : c’est réalisé par $Nmax \leftarrow s(x_1, \dots, x_n)$.

Quel est le cardinal de $\{0, 1\}^n$? : c’est 2^n ? Cet algorithme est-il en pratique efficace ? : non puisque l’on doit effectuer 2^n fois la comparaison (*).

BAREME PROVISOIRE : 6 – 7 – 7.